СТРУКТУРА РАСШИРЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

Д.Ю. Ципенюк (tsip@kapella.gpi.ru), В.А. Андреев

Институт Общей физики РАН

Расширенное пространство

1.1 Введение

Мы рассматриваем обобщение специальной теории относительности Эйнштейна (СТО) на 5-мерное пространство, а точнее говоря на (1+4)-мерное пространство $(T, \vec{X}, S)$, обладающее метрикой (+ - - - -). Физическим основанием для такого обобщения служит тот факт, что в СТО массы частиц являются скалярами и не меняются при их упругих взаимодействиях. Однако хорошо известно, что фотон можно считать безмассовой частицей и описывать плоской волной только в бесконечном пустом пространстве [1,2]. Если же фотон попадает в среду или оказывается в ограниченном пространстве, например в резонаторе или волноводе, то он приобретает ненулевую массу [3,4].

В данной работе мы всюду, специально этого не оговаривая, будем понимать под массой частицы m ее массу покоя, которая является лоренцевским скаляром. Никаких других масс у нас появляться не будет. Здесь мы следуем рекомендациям обзора [5].

Аналогичным образом можно рассмотреть процесс изменения массы и у других частиц, например, электронов, предполагая, что она зависит от внешних условий и воздействий.

Таким образом, представляется естественным расширить пространство параметров, характеризующих частицу, с учетом того, что при взаимодействии ее масса может меняться.

Приведем простую аналогию. Свободная частица движется по прямой, поэтому, чтобы описать ее поведение, можно ограничиться (1+1)-мерным пространством, образованным временем t и направлением ее движения x, поскольку остальные координаты y и z остаются постоянными. Если же частица начинает взаимодействовать с другими объектами, так что может уйти с прямой и начать двигаться еще и в плоскости (YZ), то такого пространства уже недостаточно и его приходится расширять до (1+3)-мерного [6].

Точно также и в нашем случае, пока масса частицы не меняется, можно ограничиться пространством Минковского M(1,3), но если она начинает меняться, пространство M(1,3) приходится расширять.

В физике неоднократно предпринимались попытки ввести дополнительные измерения, помимо уже известных четырех. В их основе лежали две основные идеи. Во-первых, с их помощью старались свести механические задачи к оптическим, а во-вторых, пытались построить, по аналогии с гравитацией, чисто геометрическую формулировку других взаимодействий, прежде всего, электромагнитного. Некоторые работы, относящиеся к начальному периоду развития таких идей, содержатся в юбилейном Эйнштейновском сборнике [7], монография [8] посвящена систематическому изучению одного из направлений-5-оптики, монография [9] содержит обзор более поздних исследований. Предлагаемый нами подход существенно отличается от всех перечисленных выше моделей, хотя, несомненно, идейно с ними перекликается.

1.2. Структура пространства

Каждой частице, обладающей массой m, в пространстве Минковского соответствует свой гиперболоид, в предельном случае вырождающийся в конус.

Все точки, лежащие на гиперболоиде, обладают одинаковым интервалом —расстоянием до начала координат

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 . \qquad (1.1)$$

Поскольку изменению массы частицы соответствует ее переход с одного гиперболоида на другой, т.е. изменение соответствующего интервала, нам представляется естественным выбрать в качестве дополнительной пятой координаты сам интервал s. Таким образом, мы будем работать в пространстве с координатами (t,x,y,z,s) и метрикой (+ - - - -). Рассматриваемые объекты находятся в нем на конусе

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 - s^2 = 0 . \qquad (1.2)$$

Мы будем обозначать его G(1,4) или $G(T,\vec{X},S)$.

Обычные (1+3)-мерные конуса и гиперболоиды возникают как сечения поверхности (1.2) в пространстве $G(T,\vec{X},S)$ гиперплоскостями $s = s_0$.

В пространстве $G(T,\vec{X},S)$ можно построить обычным образом объекты, имеющие различную тензорную природу и преобразующиеся соответствующим образом при линейных преобразованиях пространства $G(T,\vec{X},S)$ [10]. Векторы впространстве $G(T,\vec{X},S)$ в каждой системе координат задаются набором 5-и чисел

$$\overline{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (\widetilde{a}, a_4) = (a_0, \vec{a}, a_4). \qquad (1.3)$$

Здесь

$\overline{a}$ — обозначение 5-вектора в расширенном пространстве $G(T,\vec{X},S)$,

$\widetilde{a}$ — обозначение 4-вектора в пространстве Минковского М(1,3),

$\vec{a}$ —бозначение 3-вектора в Евклидовом пространстве Е(3).

В пространстве Минковского М(1,3) каждой частице сопоставляется 4-вектор энергии-импульса [1]

$$\widetilde{p} = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z). \qquad (1.4)$$

В расширенном пространстве $G(T,\vec{X},S)$ мы достраиваем его до 5-вектора

$$\overline{p} = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z, mc). \qquad (1.5)$$

Для свободных частиц компоненты вектора (1.5) удовлетворяют уравнению

$$E^2 = c^2 p_x^2 + c^2 p_y^2 + c^2 p_z^2 + m^2 c^4 . \qquad (1.5A)$$

Это известное соотношение релятивистской механики, связывающее энергию,импульс и массу частицы. Его геометрический смысл состоит в том, что вектор (1.5) изотропный, т.е. его длина в пространстве $G(T,\vec{X},S)$ равна нулю. Однако, в отличие от обычной релятивистской механики, теперь мы считаем, что масса частицы m также является переменной величиной, она может меняться произвольным образом при движении частицы по конусам (1.2), (1.5A). Это следует понимать таким образом, что масса частицы меняется, когда она попадает в область пространства, обладающую ненулевой плотностью вещества. Поскольку в таких областях происходит замедление света, мы будем характеризовать их величиной n - оптической плотностью. Параметр n связывает скорость света в пустоте с со скоростью света в среде v: vn = c.

Набор величин (1.5) образует 5-импульс, его компоненты сохраняются, если пространство $G(T, \vec{X}, S)$ инвариантно по соответствующему направлению. В частности, его пятая компонента p_4, имеющая смысл массы, не меняется, если частица движется так, что все время находится в областях постоянной плотностью вещества или плотностью энергии. Эту плотность внешнего вещества (энергии) можно интерпретировать, как компоненту внешней силы,
действующей на частицу.

1.3. Вектора свободных частиц

Мы будем рассматривать вектора 5-импульсов свободных частиц в пространстве $G(T, \vec{X}, S)$ и изучать их преобразования при поворотах в этом пространстве. При этом следует учитывать, что в обычной релятивистской
механике и теории поля масса частицы считается неизменной и для частиц с
нулевой и ненулевой массами покоя используются разные способы описания.
Массивные частицы характеризуются своей массой m и скоростью $\vec{v}$.

Частицы с нулевой массой (фотоны) характеризуются частотой ω и длиной волны λ. Эти ω и λ связаны с энергией E и импульсом $\vec{p}$ следующим образом

$$E = \hbar\omega \quad , \qquad \vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}\vec{n} \qquad (1.6)$$

Массивной частице сопоставляется 4-вектор энергии-импульса $\tilde{p}$

$$\tilde{p} = (\frac{E}{c}, \vec{p}) = (\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}), \qquad \beta^2 = \frac{v^2}{c^2}. \qquad (1.7)$$

Частице с нулевой массой сопоставляется 4-вектор энергии-импульса $\tilde{p}$

$$\tilde{p} = (\frac{E}{c}, \vec{p}) = (\frac{\hbar\omega}{c}, \frac{2\pi\hbar}{\lambda}\vec{n}) = (\frac{\hbar\omega}{c}, \frac{\hbar\omega}{c}\vec{n}), \qquad \beta^2 = \frac{v^2}{c^2}. \qquad (1.8)$$

Здесь $\vec{n}$- единичный вектор, задающий направленое, по которому
распространяется фотон.

В рамках нашего подхода не существует разницы между массивными и безмассовыми частицами, поэтому следует установить связь между двумя указанными способами описания. Это можно осуществить, используюя соотношения (1.6) и гипотезу де Бройля, согласно которой данные соотношения справедливы и для массивных частиц [10]. Теперь, подставляя (1.6) в (1.5a), получим связь между массой m, частотой ω и длиной волны λ.

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2} \qquad (1.9)$$

Сравнивая формулы (1.6) и (1.7), получим выражение для ω и длиной волны λ
через массу m

$$\omega = \frac{mc^2}{\hbar\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv}\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (1.10)$$

Отсюда видно, что при $v \to 0$, $\lambda \to \infty$, но $\omega \to \omega_0 \neq 0$, здесь ω_0 определяет энергию покоящейся частицы.

Достроим теперь 4-вектора (1.7), (1.8) до 5-векторов. Мы считаем, что покоящейся частице массы m сопоставляется 5-вектор

$$\overline{p} = (mc, \vec{0}, mc). \qquad (1.11)$$

Частицу, движущуюся со скоростью $\vec{v}$, можно получить, переходя в движущуюся систему координат. Тогда вектор (1.11) принимает вид

$$\overline{p} = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, mc\right). \qquad (1.12)$$

Аналогично, 4-вектор (1.8) обобщается до 5-вектора

$$\overline{p} = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, \frac{2\pi\hbar}{\lambda}\vec{n}, 0\right). \qquad (1.13)$$

При переходе в движущуюся систему координат вектор (1.13) не меняет своего вида, меняется только значение частоты ω.

$$\omega \to \omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (1.14)$$

Таким образом, в пустом пространстве в неподвижной системе отсчета имеется два принципиально различных объекта, с нулевой и ненулевой массами, которым в пространстве $G(T, \vec{X}, S)$ соответствуют 5-вектора

$$\left(\frac{\hbar\omega}{c}, \frac{\hbar\omega}{c}, 0\right). \qquad (1.15)$$

$$(mc, 0, mc). \qquad (1.16)$$

Для простоты мы записали вектора (1.15), (1.16) в (1,1,1)-мерном пространстве. Вектор (1.15) описывает фотон с нулевой массой, с энергией $\hbar\omega$ и движущийся со скоростью c. Вектор (1.16) описывает неподвижную частицу с массой m. Фотон обладает импульсом p= $\hbar\omega$/c, у массивной частицы импульс равен нулю. В 5-мерном пространстве оба эти вектора изотропны, тогда как в пространстве Минковского изотропен только вектор (1.15).

Длина вектора $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ вычисляется по формуле

$$l^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$$

Если ограничиться преобразованиями Лоренца, то в пространстве Минковского невозможно перевести изотропный вектор в неизотропный и обратно, т.е. в рамках СТО фотон не может приобрести массу, а массивная частица не может стать фотоном. Это можно сделать только с помощью нелинейных конформных преобразований. В пространстве $G(T, \vec{X}, S)$ фотон и массивную частицу можно связать друг с другом простым поворотом.

1.4. Преобразования

Рассмотрим подробно преобразования в пространстве $G(T,\vec{X},S)$.
Все они сводятся либо к гиперболическим поворотам

$$x' = \frac{x + ct\tanh\varphi}{\sqrt{1-\tanh^2\varphi}} = x\cosh\varphi + ct\sinh\varphi. \qquad (1.17)$$
$$ct' = \frac{ct + x\tanh\varphi}{\sqrt{1-\tanh^2\varphi}} = ct\cosh\varphi + x\sinh\varphi.$$

либо к обычным вращениям в плоскости

$$x' = x\cos\psi + y\sin\psi. \qquad (1.18)$$
$$y' = -x\sin\psi + y\cos\psi.$$

Имеется три типа таких преобразований.

1) Гиперболические повороты (1.17) в плоскости (T,X).

Это обычные лоренцевские повороты, соответствующие переходу в движущуюся систему отсчета. Скорость системы отсчета v и угол поворота φ связаны друг с другом соотношениями

$$\tanh\varphi = \beta = \frac{v}{c}, \qquad e^{2\varphi} = \frac{c+v}{c-v}. \qquad (1.19)$$

Величина φ является аддитивным параметром, характеризующим поворот в плоскости (T,X). Если сначала выполнить поворот на угол φ_1, а затем на угол φ_2, то в результате получится поворот на угол $\varphi_1 + \varphi_2$, т.е. в отличие от скоростей, углы поворота просто складываются. Для угла φ имеем выражение

$$e^{\varphi} = \pm\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}. \qquad (1.20)$$

В формуле (1.20) перед квадратным корнем следует выбрать знак "+", поскольку φ – вещественный параметр. Выбор знака "-" соответствует замене $\varphi \to \varphi + i\pi$, что приводит к появлению отрицательных энергий и мнимых импульсов. Мы пока не будем обсуждать смысл подопобных величин.

С точки зрения расширенного пространства $G(T,\vec{X},S)$ это соответствует произвольным движениям в пространстве-времени Минковского M(1,3) с постоянной оптической плотностью n. При таких поворотах вектора частиц (1.15), (1.16) преобразуются следующим образом

$$(\frac{\hbar\omega}{c},\frac{\hbar\omega}{c},0)\to(\frac{\hbar\omega'}{c},\frac{\hbar\omega'}{c},0),\text{ где } \omega'=\omega e^{\varphi}, -\infty<\varphi<\infty. \qquad (1.21)$$

$$(mc,0,mc)\to(\frac{mc}{\sqrt{1-\tanh^2\varphi}},\frac{mc\tanh\varphi}{\sqrt{1-\tanh^2\varphi}},mc)=mc(\cosh\varphi,\sinh\varphi,1) \qquad (1.22)$$

Поскольку в формуле (1.20) оставлен знак "+", преобразованная частота $\omega'=\omega e^{\varphi}$ в формуле (1.21) всегда остается положительной.

При таком преобразовании безмассовая частица (фотон) меняет свою энергию и импульс, но не приобретает ненулевой массы. У массивной частицы не меняется масса, которая у нее имелась первоначально. Энергия и импульс у частиц обоих типов меняются, но 5-вектора у них остаются изотропными.

С точки зрения наблюдателя, связанного с неподвижной системой отсчета, преобразование (1.21) можно интерпретировать как результат воздействия наобъекты (1.15), (1.16) некоторой силы, которая меняет их энергии и мпульсы.

Преобразования (1.17) сохраняют величину интервала s, и длину векторов в пространстве Минковского M(1,3) и соответствуют области расширенного пространства G(1,3,const). В этом пространстве они переводят в себя (1+3)-мерные конусы и гиперболоиды, причем действуют на них транзитивно, т.е. с их помощью любую точку, лежащую на конусе или гиперболоиде, можно перевести в любую другую точку, лежащую на той же поверхности. Но перейти с одной такой поверхности на другую с помощью преобразований (1.17) невозможно [11].

2) Рассмотрим теперь повороты в плоскости (TS).
Это тоже гиперболическое преобразование, имеющее вид (1.17). Их физический смысл состоит в том, что пространственных движений мы не совершаем, все время находимся в одной и той же точке, но оптическая плотность в этой точке с течением времени меняется. Таким образом, в данном случае преобразование (1.17) означает переход к другому моменту времени и другой оптической плотности. Все движения происходят по 2-мерным конусам и гиперболоидам и имеют транзитивный характер. Поскольку пространственных движений не совершается, импульсы частиц должны сохраняться.

При преобразованиях (1.17) фотонный вектор (1.15) преобразуется следующим образом

$$(\frac{\hbar\omega}{c},\frac{\hbar\omega}{c},0)\to(\frac{\hbar\omega}{c\sqrt{1-\tanh^2\theta}},\frac{\hbar\omega}{c},\frac{\hbar\omega\tanh\theta}{c\sqrt{1-\tanh^2\theta}})=(\frac{\hbar\omega}{c}\cosh\theta,\frac{\hbar\omega}{c},\frac{\hbar\omega}{c}\sinh\theta) \quad (1.23)$$

В результате такого преобразования возникает частица с массой

$$m=\frac{\hbar\omega\tanh\theta}{c^2\sqrt{1-\tanh^2\theta}}=\frac{\hbar\omega}{c^2}\sinh\theta \qquad (1.24)$$

Преобразование (1.23) параметризуется аддитивным параметром θ - углом поворота. Этот угол мы отсчитываем от светового конуса в сторону кположительному направлению оси времени T. При таких поворотах в верхней полуплоскости ($t>0$) угол θ меняется от 0 до ∞. В соответствии с формулой (1.24) в этом случае у фотонов появляется только положительная масса. Этот результат представляется совершенно естественным, поскольку свободный фотонный вектор (1.15) существует лишь в пустом пространстве с оптической плотностью n=1. Поворот (1.23) увеличивает оптическую плотность пространства и превращает фотон в частицу ненулевой положительной массой.

Можно вычислить и скорость такой частицы. Для этого следует воспользоваться формулой v=cp/E. Она дает

$$v = c\sqrt{1-\tanh^2\theta} = \frac{c}{\cosh\theta} \qquad (1.25)$$

Легко проверить, что, несмотря на то, что и масса и скорость частицы меняются, ее импульс остается постоянным. Это сразу следует из релятивистского выражения для импульса частицы массы m, движущейся со скоростью v, и формул (1.24), (1.25).

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\hbar\omega}{c} \qquad (1.26)$$

С помощью формулы (1.25) можно установить связь между углом поворота θ и величиной оптической плотности n.

$$n = \cosh\theta, \quad e^{\theta} = n \pm \sqrt{n^2-1} \qquad (1.27)$$

В формуле (1.27) следует оставить оба знака перед квадратным корнем, поскольку в обоих случаях правая часть больше нуля и имеет физический смысл. В этих обозначениях повернутый вектор (1.23) приобретает вид

$$\left(\frac{\hbar\omega}{c}n, \frac{\hbar\omega}{c}, \frac{\hbar\omega}{c}\sqrt{n^2-1}\right). \qquad (1.28)$$

В формуле (1.28) мы оставляем перед квадратным корнем только знак "+", поскольку выше мы уже установили, что при вращениях в полуплоскости (t<0), однако, мы сейчас не будем вникать в их физический смысл.

Массивный вектор (1.16) преобразуется следующим образом

$$(mc, 0, mc) \to (mce^{\theta}, 0, mce^{\theta}). \qquad (1.29)$$

При таком повороте массивная частица меняет свою массу

$$m \to me^{\theta}, \qquad -\infty < \theta < \infty. \qquad (1.30)$$

и энергию, но сохраняет импульс.

Тот факт, что в формуле (1.27) оба знака имеют непосредственный физический смысл, означает, что при таком преобразовании из одной частицы с массой m возникают две частицы с разными массами

$$m \to m_+ = me^{\theta_+}, \qquad (1.31)$$

$$m \to m_- = me^{\theta_-}. \qquad (1.32)$$

Таким образом, при поворотах в плоскости (TS) массы частиц, обладающих массами покоя, могут изменяться по двум разным законам (1.31) и (1.32). При больших n они имеют следующий характер поведения

$$e^{\theta_+} = n + \sqrt{n^2-1} \to 2n - \frac{1}{2n}, \text{ при } n \to \infty, \qquad (1.34)$$

$$e^{\theta_-} = n - \sqrt{n^2-1} \to \frac{1}{2n}, \text{ при } n \to \infty, \qquad (1.35)$$

Характерно, что фотоны имеют только одну массовую ветвь (1.24).

3) Третий тип поворота, это поворот в плоскости (XS).

На самом деле пространство (X) 3-мерно с координатами (x,y,z), но мы выделим в нем одно направление (x) и будем рассматривать вращение в 2-мерном пространстве с координатами (x,s). Все остальные преобразования типа 3) можно получить, комбинируя такие вращения с обычными 3-мерными пространственными поворотами.

Формулы (1.18) задают обычный евклидов поворот. Он соответствует переходу из пространства с одной оптической плотностью в пространство с другой оптической плотностью. При этом никаких временных процессов не происходит, все рассматривается в один и тот же момент времени t.

При этом никаких временных процессов не происходит, все рассматривается в один и тот же момент времени t. Поэтому энергия частиц сохраняется, а все происходящие с ними процессы сводятся к внутренним перестройкам. Условно это можно понимать так, что частица, попадая в более плотную среду, деформируется упругим образом, а, покидая ее, восстанавливает свои характеристики. При этом не происходит обмена энергией и импульсом между средой и частицей.

При повороте на угол ψ фотонный вектор (1.15) преобразуется по закону

$$(\frac{\hbar\omega}{c},\frac{\hbar\omega}{c},0)\to(\frac{\hbar\omega}{c},\frac{\hbar\omega}{c}\cos\psi,\frac{\hbar\omega}{c}\sin\psi)\ . \qquad (1.36)$$

При этом фотон приобретает массу

$$m=\frac{\hbar\omega}{c^2}\sin\psi, \qquad (1.37)$$

и скорость

$$v=c\cos\psi, \qquad (1.38)$$

Используя формулу (1.38), можно связать угол поворота ψ с величиной оптической плотности n

$$n=\frac{1}{\cos\psi}, \qquad (1.39)$$

В этих обозначениях преобразованный фотонный вектор (1.36) принимает вид

$$(\frac{\hbar\omega}{c},\frac{\hbar\omega}{cn},\frac{\hbar\omega}{cn}\sqrt{n^2-1})\ . \qquad (1.40)$$

Вектор (1.16) массивной частицы преобразуется по закону

$$(mc,0,mc)\to(mc,-mc\sin\psi,mc\cos\psi)=(mc,-\frac{mc}{n}\sqrt{n^2-1},\frac{mc}{n}). \qquad (1.41)$$

Энергия частицы при таком преобразовании сохраняется, но меняется ее масса

$$m\to m\cos\psi=\frac{m}{n}, \qquad (1.42)$$

и импульс

$$0\to-mc\sin\psi=-\frac{mc}{n}\sqrt{n^2-1}, \qquad (1.43)$$

Повороты (1.18) можно совершать, вообще говоря, на произвольные углы, однако формулы (1.36), (1.37) показывают, что, поскольку мы не умеем придавать смысл отрицательным массам фотонов, следует ограничиться диапазоном

$$0\le\psi\le\pi. \qquad (1.44)$$

Теперь масса фотона всегда положительна, а возможность появления отрицательного знака у его импульса следует понимать как отражение фотона о оптически плотных областей.

Аналогичным образом интерпретируются и формулы (1.41)-(1.43), описывающие преобразование вектора массивной частицы. Такое преобразование физически соответствует попаданию частицы в область с ненцлевой плотностью вещества, приводящей к появлению оптической плотности n. На частицу начинает действовать "закон Архимеда" и, в соответствии с формулой (1.42), ее масса уменьшается и может даже стать отрицательной, когда плотность частицы станет меньше плотности среды. Формула (1.43) показывает, что на такую частицу действует "выталкивающая" сила, сообщая ей импульс, который всегда направлен в сторону, противоположную движению.

Отметим еще раз, что при всех таких преобразованиях изотропные вектора остаются изотропными и, вообще, длина произвольного вектора из $G(T,\vec{X},S)$ не меняется. Если же мы рассмотрим пространство Минковского M(1,3), то в нем преобразования 1), 2), 3) действуют транзитивно и с их помощью можно перевести любую точку в любую. Действительно, преобразования Лоренца 1) действуют транзитивно на конусах и гиперболоидах в M(1,3), оставляя неизменным интервал. В свою очередь, преобразования 2) и 3) меняют интервал и позволяют переходить с одного гиперболоида на другой с совершением - 2), или без совершения внешней работы - 3).

Заключение

Рассмотрено обобщение СТО Эйнштейна на 5-мерное пространство, позволяющее построить 5-мерный вектор $\overline p = (E/c, p_{x,} p_y, p_z, mc)$, у которого в качестве пятой координат выбирается масса частицы. Все компоненты 5-мерного вектра связаны известным соотношением $E^2 = c^2 p_x^2 + c^2 p_y^2 + c^2 p_z^2 + m^2 c^4$. В рамках такого подхода не существует разницы между массивными и безмассовыми частицами, и, в отличие от 4-мерного пространства Минковского, во введенном пространстве 5-векторы становятся изотропными как для массовых, так и для безмассовых частиц.

В результате увеличения размерности пространства появляются, кроме преобразования Лоренца, еще два преобразования пространства (гиперболический и евклидов повороты), которые переводят массовые частицы в безмассовые и наоборот, причем при этих преобразованиях изотропия 5-векторов не теряется.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теория поля, М., "НАУКА", (1967).

[2] Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, М., "ИЛ", (1963).

[3] Гинзбург В.Л., Теоретическая физика и астрофизика, М., "НАУКА", (1981).

[4] Ривлин Л.А., УФН, 167, 309 (1997).

[5] Окунь Л.Б, УФН, 158, 511 (1989).

[6] Вигнер Е., Этюды о симметрии, М. "МИР", (1971).

[7] Альберт Эйнштейн и теория гравитации, сборник статей, М. "МИР", (1979).

[8] Румер Ю.Б., Исследования по 5-оптике, М., "ГОСТЕХИЗДАТ", (1956).

[9] Владимиров Ю.С., Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий, М., "МГУ", (1987).

[10] Бом Д., Квантовая теория, М., "НАУКА",(1965).

[11] Розенфельд Б.А., Многомерные пространства, М., "НАУКА", (1966).

[12] Рашевский П.К., Риманова геометрия и тензорный анализ, М., "НАУКА", (1967).