Некоторые геометрические характеристики числового образа оператора

Геворгян Л.З. (levgev@altavista.net)

Государственный Инженерный Университет Армении

0.Пусть A (ограниченный, линейный) оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Числовым образом оператора A (или полем значений) называется множество $W(A)=\{(Ax,x):\|x\|=1\}$. Согласно классической теореме Хаусдорфа-Теплица $W(A)$ является выпуклым ограниченным подмножеством комплексной плоскости $\Re$, причем замыкание $W(A)$ содержит спектр SpA оператора A. В настоящей короткой заметке мы рассмотрим две элементарные характеристики числового образа.

1.**Кинематическое описание границы числового образа**

Сначала установим одно полезное равенство, которое будет служит основой для описания границы числового образа оператора A. Пусть λ некоторое положительное число. Тогда

$$\frac{\|(A+\lambda I)x\|}{\|x\|}=\sqrt{\frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2}+2\lambda\operatorname{Re}(Ax,x)+\lambda^2}\geq\sqrt{2\lambda\inf\operatorname{Re}W(A)+\lambda^2},$$

откуда при достаточно большом λ для резольвенты $R_{-\lambda}(A)=(A+\lambda I)^{-1}$ получим неравенсто

$$\|R_{-\lambda}(A)\|\leq\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+2\lambda\inf\operatorname{Re}W(A)}},$$

и оценку

$$\liminf_{\lambda\to+\infty}\left(\lambda-\lambda^2\|R_{-\lambda}(A)\|\right)\geq\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\lambda-\frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2+2\lambda\operatorname{Re}\inf W(A)}}\right)=\inf\operatorname{Re}W(A).$$

С другой стороны

$$\frac{\operatorname{Re}(Ax,x)}{\|x\|}=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\lambda\|x\|-\sqrt{\|Ax\|^2-2\lambda\operatorname{Re}(Ax,x)+\lambda^2\|x\|^2}\right)=$$
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\lambda\|x\|-\|(A-\lambda I)x\|\right)\geq\|x\|\cdot\limsup_{\lambda\to+\infty}\left(\lambda-\|A-\lambda I\|\right),$$

откуда

$$\inf \operatorname{Re} W(A) \geq \lim_{\lambda \to +\infty} \sup\left(\lambda - \|A - \lambda I\|\right).$$

Ввиду равенств

$$\lambda^2 R_{-\lambda}(A) = A^2 R_{-\lambda}(A) - A + \lambda I$$

и

$$\lim_{\lambda \to +\infty} R_{-\lambda}(A) = \mathbf{0}$$

получим

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \sup\left(\lambda - \|A - \lambda I\|\right) = \lim_{\lambda \to +\infty} \sup\left(\lambda - \lambda^2 \|R_{-\lambda}(A)\|\right).$$

Таким образом

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \left(\lambda - \|A - \lambda I\|\right) = \inf \operatorname{Re} W(A).$$

Это равенство, в несколько ином виде, установлено в [9].

Пусть теперь λ произвольное комплексное число. Подставив вместо A оператор $e^{-i\phi} A$, где $\phi = \arg \lambda$, будем иметь

$$\lim_{\substack{\lambda \to +\infty, \\ \arg \lambda = \phi}} \left(|\lambda| - \|A - \lambda I\|\right) = \inf \operatorname{Re} W\left(e^{-i\phi} A\right).$$

Обозначим $D = \{z : |z| < 1\}$ и пусть $\overline{D}$ –его замыкание. Нетрудно заметить, что условия $\overline{W(A)} \subset \overline{D}$ и

$$\lim_{\substack{\lambda \to +\infty, \\ \arg \lambda = \phi}} \left(|\lambda| - \|A - \lambda I\|\right) \geq -1, \ \phi \in [0, 2\pi) \tag{1}$$

эквивалентны. Другое необходимое и достаточное условие этого включения указано в [1], Теорема 2. Оно состоит в выполении неравенства

$$\|A - \lambda I\| \leq 1 + \sqrt{1 + |\lambda|^2}, \ \lambda \in \Re \tag{2}$$

Очевидно, что (2) влечет (1).

Введем функцию, описывающую перемещение опорной слева к числовому образу оператора прямой при его вращении. Обозначим

$$f(\phi) = \lim_{\substack{|\lambda| \to \infty, \\ \arg \lambda = \phi}} \left(|\lambda| - \|A - \lambda I\|\right), \ \phi \in [0, 2\pi). \tag{3}$$

Теорема 1. Граница числового образа оператора A задается уравнением

$$\begin{cases} x = f(\phi)\cos\phi - f'(\phi)\sin\phi \\ y = f(\phi)\sin\phi + f'(\phi)\cos\phi \end{cases}, \quad \phi \in [0, 2\pi). \tag{4}$$

Доказательство. Согласно одному результату из геометрической теории евклидовых пространств, наименьшее замкнутое множество, содержащее данное подмножество комплексной плоскости (замкнутая выпуклая оболочка этого подмножества) совпадает с пересечением всех замкнутых полуплоскостей, содержащих это подмножество (см., например [6]). Таким образом

$$\overline{W}(A) = \bigcap_{\phi \in [0,2\pi)} \left\{ z : \operatorname{Re} \; ze^{-i\phi} \; \geq \; f(\phi) \right\}.$$

Граница числового образа оператора A будет совпадать с отрицательной подэрой (см. [12] , стр. 283) кривой, определяемой в полярной системе координат уравнением $r = f(\phi)$. Она может быть найдена из следующих соображений. Границей фиксированной полуплоскости служит прямая

$$x\cos\phi + y\sin\phi = f(\phi). \tag{5}$$

Указаная отрицательная подэра, грубо говоря, является огибающей семейства прямых (5). Следовательно, мы должны решить систему

$$\begin{cases} x\cos\phi + y\sin\phi = f(\phi) \\ -x\sin\phi + y\cos\phi = f^{\prime}(\phi) \end{cases}$$

что приводит к уравнению (4).

Граница множества $W(A)$ является выпуклой кривой. Известно (см., например, [2], гл. 1, § 4.3, Следствие 2) что выпуклая функция дифференцируема во всех точках из области своего определения, за исключением, может быть, лишь счетного числа точек, односторонние производные существуют и непрерывны во всех точках, где эта функция дифференцируема.

Заметим, что уравнение (4) задает координаты опорной точки на границе числового образа в зависимости от угла поворота множества $W(A)$, поэтому оно не может описать прямолинейные участки границы. Нетрудно установить, что им соответствуют точки разрыва производной функции f . Что же касается круговых участков, то для них функция f должна иметь (локально) вид

$$f(\phi) = a\cos\phi + b\sin\phi + c\,,$$

причем центр окружности есть точка $C(a;b)$, а радиус окружности равен $|c|$. Если $c = 0$, то $C(a;b)$ является угловой точкой, где имеется более одной опорной прямой, причем кривая (4) задерживается в этой точке, пока параметр меняется между значениями, соотвтствующими крайным положениям указанных опорных прямых.

Пусть μ -граничная точка числового образа, причем $\mu = (Ax, x)$. Согласно Лемме 2 из [5] существует действительное число $\omega \in [0;\pi)$ (угол наклона опорной прямой), такое что $e^{i\omega}(A-\mu I)x = e^{-i\omega}(A-\mu I)^* x$. Тогда условие $(A-\mu I)x = \theta$ влечет $(A-\mu I)^* x = \theta$, т.е. собственный элемент оператора A, отвечающий собственному значению μ в то же время является собственным элементом оператора A^* с собственным значением $\overline{\mu}$ (такое собственное значение называется нормальным).

Небольшой анализ позволяет установить, что любая угловая точка μ границы числового образа является нормальным собственным значением оператора A. Действительно, если $e^{i\omega}(A-\mu I)x = e^{-i\omega}(A-\mu I)^* x$, $e^{i\delta}(A-\mu I)x = e^{-i\delta}(A-\mu I)^* x$, то $(A-\mu I)x = (A-\mu I)^* x = \theta$. Несмотря на элементарный характер этого утверждения, оно или доказывается при ненужных ограничениях и частично (см. [4] , [11]).

Указанные особенности будут проиллюстрированы нижеследующими примерами. Прежде всего рассмотрим оператор A в $\Re^2$, соответствующий матрице

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Норма A равна наибольшему собственному значению матрицы

$$\begin{pmatrix} |a-\lambda|^2 + |b|^2 & a\overline{c} + b\overline{d} - \overline{c}\lambda - b\overline{\lambda} \\ \overline{a}c + \overline{b}d - c\overline{\lambda} - \overline{b} & |d-\lambda|^2 + |c|^2 \end{pmatrix}.$$

Аккуратные вычисления показывают, что

$$f(\phi) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Re}\left((a+d)e^{-i\phi}\right) - \sqrt{\operatorname{Re}^2\left((a-d)e^{-i\phi}\right) + |b|^2 + |c|^2 + 2\operatorname{Re}\left(bce^{i2\phi}\right)} \right).$$

Следовательно

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\operatorname{Re}(a+d) - \left(m^2\cos\phi + n\sin(\phi+\alpha)\right)/\sqrt{m^2 + n\sin(2\phi+\alpha)} \\ y = \dfrac{1}{2}\operatorname{Im}(a+d) - \left(m^2\sin\phi + n\cos(\phi+\alpha)\right)/\sqrt{m^2 + n\sin(2\phi+\alpha)} \end{cases}, \phi \in [0, 2\pi)$$

где действительные параметры m, n и α определяются числами a, b, c, d .

Известно (см., например, [4]) что числовой образ оператора в двумерном пространстве есть эллипс (вырожденный в отрезок прямой в случае норамального оператора и в круг в случае жордановой клетки).

Перейдем теперь к числовым примерам. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f_A(\phi) = -\sqrt{4+\cos^2\phi}$, следовательно

$$\begin{cases} x = -\dfrac{5\cos\phi}{\sqrt{4+\cos^2\phi}} \\ y = -\dfrac{4\sin\phi}{\sqrt{4+\cos^2\phi}} \end{cases}$$

или

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 .$$

Заметим, что фокусы $F_1(-1;0)$ и $F_2(1;0)$этого эллипса определяются собственными значениями $\{-1,1\}$ матрицы A .

Пусть теперь

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Мы имеем $f_B(\phi) = \frac{1}{2}(\cos\phi - 1)$ и

$$W(B) = \left\{ z : \left| z - \frac{1}{2} \right| \le \frac{1}{2} \right\} .$$

Если же

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то $f_C(\phi) = -|\cos\phi|$ и

$$\begin{cases} x = -\operatorname{sgn}\cos\phi \\ y \equiv 0. \end{cases}$$

Заметим, что $C = S^{-1}AS$, где

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

О связи числовых образов A и C см. п. 2.

Рассмотрим теперь оператор в пространстве $\Re^3$. Пусть

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\|D-\lambda I\| = \max\left\{\sqrt{|\lambda|^2+\frac{1}{2}+\sqrt{|\lambda|^2+\frac{1}{4}}},\ \sqrt{1+|\lambda|^2-2\operatorname{Re}\lambda}\right\}.$$

Равенсто этих двух радикалов имеет место на левой ветви гиперболы

$$9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-3y^2=1,$$

так что неравенство, связывающее эти два выражения выполняется в створке между асимптотами $y=\pm\sqrt{3}x$, т.е.

$$\|D-\lambda I\| = \begin{cases}\sqrt{|\lambda|^2+\frac{1}{2}+\sqrt{|\lambda|^2+\frac{1}{4}}}, & \phi\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{4\pi}{3},2\pi\right)\\ \sqrt{1+|\lambda|^2-2\operatorname{Re}\lambda}, & \phi\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)\end{cases}$$

откуда

$$f(\phi)=\begin{cases}-\frac{1}{2}, & \phi\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{4\pi}{3},2\pi\right)\\ \cos\phi, & \phi\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)\end{cases}$$

следовательно

$$\begin{cases} x=\begin{cases}-\frac{1}{2}\cos\phi, & \phi\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{4\pi}{3},2\pi\right)\\ 1, & \phi\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)\end{cases}\\ \\ y=\begin{cases}-\frac{1}{2}\sin\phi, & \phi\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{4\pi}{3},2\pi\right)\\ 0, & \phi\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)\end{cases}\end{cases}$$

Точка $(1;0)$ является угловой. Ей соответствует нормальное собственное значение $\mu=1$ с собственным вектором $\{0,0,1\}$. Две другие точки, а именно точки с координатами $\left(1/4;\pm\sqrt{3}/4\right)$ являются точками плавного сопряжения, т.е. прямые

$$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$$

касаются окружности $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. В противном случае оператор D был бы нормальным и его числовой образ совпал бы с треугольником с вершинами в указанных точках.

2. Числовой образ и подобие операторов

Согласно Люмеру [9], в любом банаховом пространстве можно ввести (по крайней мере одно) полувнутреннее произведение [.,.] и соответствующий числовой образ

$$\tilde{W}(A) = \{[Ax, x] : [x, x] = 1\}.$$

Так как разные полувнутренние произведения порождают одну и ту же норму, то формула (3) показывает, что разные числовые образы имеют одну и ту же выпуклую оболочку (в отличие от гильбертова пространства, числовой образ в произвольном банаховом пространстве может и не быть выпуклым).

В книге [3] при переизложени этих результатов по небрежности получилось, что то же самое справедливо также для эквивалентных норм. То что это утверждение ошибочно, показыват следующий

Пример. Пусть A_α, $\alpha \in \Re$ оператор, действующий в пространстве $L^2(0;1)$ по формуле

$$(A_\alpha f)(x) = xf(x) + \alpha \int_0^x f(t)dt,$$

а I^α –оператор дробного интегрирования Римана-Лиувилля

$$(I^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt.$$

Нетрудно доказать, что $I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}$, $I^\alpha A_\alpha = MI^\alpha$, где M - оператор умножения на независимую переменную в $L^2(0;1)$.

Как показал Калиш [8] (см. также Сахнович [13]), оператор мнимого интегрирования $I^{\beta i}, \beta \in \nabla$

$$(I^{\beta i} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1+i\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{\beta i} f(t)dt$$

ограничен и ограниченно обратим в $L^2(0;1)$, следовательно, A_α и $A_{\mathrm{Re}\,\alpha}$ подобны. Очевидно $W(A_0) = W(M) = (0;1)$. Что же касается оператора $A_{\beta i}$, то взяв $f(x) \equiv 1$, получим

$$(A_{\beta i} f, f) = \frac{1+\beta i}{2}.$$

Мы будем рассматривать случай гильбертовых пространств и опишем существенную часть числового образа подобных операторов.

Теорема 2. Персечение замыканий числовых образов всех операторов, подобных некоторому оператору A совпадает с выпуклой оболочкой множества SpA .

Доказательство. Так как все указанные множества содержат SpA, то достаточно будет показать, что для произвольной точки, не принадлежащей выпуклой оболочке множества SpA существует некоторый подобный A оператор C, такой что $W(C)$ не содержит указанную точку. Параллельным переносом и поворотом эту задачу можно свести к канонической области-правой полуплоскости $\Re^+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. Итак, пусть $SpA \subset \Re^+$. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1-z}{1+z},$$

осуществляющую конформное отображение $\Re^+$ на D. Пусть $B = (I - A)(I + A)^{-1}$. Согласно теореме об отображении спектра имеет место включение $SpB \subset D$, причем SpB содержится также внутри некоторого круга меньшего радиуса. Обозначим $g_t(z) = \dfrac{1-tz}{1+tz}$, $t \in (0;1)$. Функция g_t аналитична в области, охватывающей $\overline{D}$ и отображает D в $\Re^+$. Пусть $A_t = (I - tB)(I + tB)^{-1}$. Очевидно, что $A_t = ((1-t)I + (1+t)A)((1+t)I + (1-t)A)^{-1}$ и A_t при $t \to 1-0$ по операторной норме сходится к A. Из неравенства

$$|(A_t x, x) - (Ax, x)| \le \|A_t - A\|$$

следует, что если все $W(A_t)$ содержатся в некотором замкнутом можестве F, то и $W(A)$ также удовлетворяет этому условию.

Так как спектральный радиус оператора B строго меньше единицы, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (B^n x, B^n y)$$

сходится и определяет скалярное произведение $[x, y]$, порождающее норму $|\cdot|$, эквивалентную первоначальной (см. [7], Задача 122, Следствие 2). Обозначим через $\tilde{B}$ оператор B, рассматриваемый как отображение относительно скалярного произведения [.,.].Тогда $\left|\tilde{B}\right| < 1$. Согласно известному результату ([10], гл. 11, 153, Теорема Б) $W\left(\tilde{A}_t\right)$ является подмножеством замыкания $\Re^+$, чем и завершается доказательство Теоремы 2.

Литература

1. Berger C. A., Stampfli J. G., Mapping theorems for the numerical range, Amer. Math. J., 89 (1967), pp. 1047-1055.
2. Бурбаки Н., Функции действительного переменого, «Наука», М., 1965.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы, т.3, Спектральные операторы, «Мир», М., 1974.
4. Donoghue W. F., Jr., On the numerical range of a bounded operator, Michigan Math. J. 4 (1957), pp. 261-263.
5. Embry M., The numerical range of an operator, Pacific J. Math., 32, (1970), #3, pp. 647-650.
6. Furuta T., Some characterizations of convexoid operators, Rev. Roum. Math. Pures Et Appl., 18, # 6, pp.892-900.
7. Halmos P.R., A Hilbert Space Problem Book, Second Ed., Springer-Verlag, New York, 1982.
8. Kalish G. K., On similarity of certain operators, Proc. Conf. on Hilbert Space Operators, Thiany, 1970.
9. Lumer G., Semi-inner product spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 100, (1961), pp. 29-43.
10. Рисс Ф., Секефалви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, «Мир», М., 1979.
11. Stampfli J. G., Extreme points of the numerical range of hyponormal operators, Michigan Math. J. 13 (1966), pp. 87-89.
12. Савелов А.А., Плоские кривые, ГИФМЛ, Москва, 1960.
13. Сахнович Л. А., Треугольные интегро-дифференциальные операторы с разностным ядром, Сиб. Мат. Ж., 19, 1978, стр. 871-878.