Выдающиеся точки числового образа оператора

Геворгян Л. З. (levgev@altavista.net)

Государственный Инженерный Университет Армении

0.Пусть A (ограниченный, линейный) оператор, действующий в гильбертовом пространстве $H,\langle\cdot,\cdot\rangle$. Числовым образом оператора A (или полем значений) называется множество $W(A)=\{\langle Ax,x\rangle:\|x\|=1\}$. Согласно классической теореме Хаусдорфа-Теплица $W(A)$ является выпуклым ограниченным подмножеством комплексной плоскости $\Re$, причем замыкание $W(A)$ содержит спектр SpA оператора A. Оказывается, что некоторые (особые) точки на границе $\partial W(A)$ тесным образом связаны со спектральными свойствами оператора A. В п. 1 рассматриваются условия, при которых граничная точка является собственным значением и, в частности, когда существует общий для оператора и его сопряженного собственный элемент. В п. 2 мы рассматриваем точки из замыкания $W(A)$.

1. ВЫДАЮЩИЕСЯ ТОЧКИ, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ ЧИСЛОВОМУ ОБРАЗУ

Начнем с элементарных свойств числового образа. Следуя работе М. Эмбри [5], введем множество $M_\lambda=\{x:\langle Ax,x\rangle=\lambda\|x\|^2\}$. Очевидно, что $\lambda\in W(A)$ эквивлентно $M_\lambda\neq\{\theta\}$. Условие $\langle Ax,x\rangle=\lambda\|x\|^2$ означает, что $\langle(A-\lambda I)x,x\rangle=0$, таким образом λx является наилучшим приближением Ax, принадлежашим одномерному подпространству, порожденному элементом x. Из теоремы Пифагора

$$\|Ax\|^2=\|(A-\lambda I)x\|^2+\|\lambda x\|^2 \tag{1.1}$$

Отсюда будем иметь $|\lambda|\le\|Ax\|/\|x\|$. Переходом к сопряженному оператору получим $|\lambda|=|\bar\lambda|\le\|A^*x\|/\|x\|$, так что $|\lambda|\le\inf\limits_{x\in M_\lambda\setminus\{\theta\}}\{\|Ax\|/\|x\|,\|A^*x\|/\|x\|\}$.

Определение 1.1.Число λ называется нормальным собственным значением оператора A, если $(A-\lambda I)x=\theta$ и $(A-\lambda I)^*x=\theta$, т. е. собственный элемент $x\neq\theta$ оператора A , отвечающий λ, одновременно является собственным элементом оператора A^*, отвечающим собственному значению $\bar\lambda$.

Предложение 1.1. Пусть $\lambda\in W(A)$. Число λ является:

а) собственным значением A тогда и только тогда, когда существует ненулевой элемент $x\in M_\lambda$, такой что

$$|\lambda| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

б) нормальным собственным значением, если дополнительно выполняется неравенство $\|A^*x\| \le \|Ax\|$.

Доказательство. Необходимость будучи очевидной, в доказательстве нуждается только достаточность.

а) из равенства (1.1) имеем $\|(A-\lambda I)x\|^2 = \|Ax\|^2 - \|\lambda x\|^2 = 0$,

б) элементарным образом следует из неравенства $|\lambda| \le \inf\{\|Ax\|/\|x\|, \|A^*x\|/\|x\|\}$.

Заметим, что из $Ax = \lambda x$ вытекает $\|A^*x\| \ge |\lambda|\|x\| = \|Ax\|$ так что на самом деле условие б) означает $\|A^*x\| = \|Ax\|$. Если же $Ax = \lambda x$, но $A^*x \ne \overline{\lambda}x$, то $\|A^*x\| > |\lambda|\|x\|$.

Это предложение показывает, что собственное значение обладает некоторым экстремальным свойством.

Следствие 1.2. Пусть λ *принадлежит* $W(A)$ *и* $|\lambda| = \|A\|$ *. Тогда* λ *является нормальным собственным значением.*

Это Следстие имеет длинную историю. В [8] в связи с эргодической теорией был установлен следующий результат.

Пусть оператор A *является сжатием (т.е.* $\|A\| \le 1$ *) и пусть* x *есть неподвижная точка оператора* A *,* $Ax = x$ *. Тогда* A *и* A^* *имеют одну и ту же неподвижную точку,* $A^*x = x$ *.*

Немного более общее утверждение имеется в [6], Лемма 1.10.

Предложение. Если $Ax = \lambda x$ *и* $|\lambda| = \|A\|$ *, то* $A^*x = \overline{\lambda}x$ *.*

Другое свойство общих операторов, действующих в гильбертовом пространстве, описано в [14], Решение 168.

Предложение. Пусть $\lambda \in W(A)$ *и* $|\lambda| = \|A\|$*. Тогда* $Ax = \lambda x$ *.*

Определение 1.2. Оператор A *, действующий в банаховом пространстве называется паранормальным, если для любого* x *имеет место неравенство*

$$\|Ax\|^2 \le \|A^2x\| \cdot \|x\|.$$

Оператор A *называется эквипаранормальным, если для любого* $\lambda \in \Re$ *оператор* $A - \lambda I$ *паранормален.*

Как было показано в [2], паранормальные операторы степенноправильные, т.е. для любого x существует предел

$$r(x, A) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \|A^n x\|^{\frac{1}{n}} = \sup_n \frac{\|A^{n+1}x\|}{\|A^n x\|}$$

называемый спектральным радиусом элемента x (относительно оператора A).

Для паранормального оператора Предложение 1.1 может быть уточнено.

Предложение 1.3. Пусть λ принадлежит числовому образу паранормального оператора A. Число λ является собственным значением A тогда и только тогда, когда существует ненулевой элемент $x \in M_\lambda$, такой что $|\lambda| = r(x, A)$. Тогда $Ax = \lambda x$.

Доказательство. Для любого оператора A

$$\frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|x\|^2} \le \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

А для паранормального оператора дополнительно

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le r(x, A),$$

откуда $|\lambda| = \|Ax\| / \|x\|$.

Следующий пример показывает, что условие паранормальности не может быть просто отброшено.

Пример 1.1. Пусть S –оператор простого одностороннего сдвига и $\{e_n\}_0^\infty$ - базис, сдвигаемый оператором S, $Se_n = e_{n+1}$. Очевидно, что $\langle S^* e_k, e_k \rangle = 0$ и $\lim \sqrt[n]{\|S^{*n} e_k\|} = 0$ для любого фиксированного $k = 0,1,\cdots$, но тем не менее $S^* e_k \ne \theta$ если $k \ne 0$.

Напомним некоторые факты из геометрической теории евклидовых пространств. Как хорошо известно, любое выпуклое компактное подмножество K в $\Re$ является пересечением всех замкнутых полуплоскостей, содержащих K, а также пересечением всех замкнутых кругов, содержащих K (см. [7], 3, Лемма).

Определение 1.3. Прямая l называется опорной к множеству $S \subset \Re$ если S целиком лежит по одну сторону от прямой l и $l \cap \overline{S} \ne \varnothing$.

Хорошо известно (см.[15], гл. 2, Упражнение 2.9) что если p есть граничная точка выпуклого множества S , то существует опорная к S прямая, проходящая через p.

Нетрудно заметить, что для пересечения достаточно брать лишь полуплоскости, содержащие на своей границе по крайней мере одну точку из K, т.е. полуплоскости, ограниченные опорными к K прямыми. То же самое справедливо для кругов. Действительно, пусть $\overline{D}(c)$-некоторый круг с центром в c, содержащий K. Так как и $\overline{D}(c)$, и K компактны, то кратчайшее расстояние между ними реализуется по крайней мере для пары точек p, q , приндлежащих соответствующим множествам, $p \in \overline{D}(c), q \in K$. Очевидно, что круг $U \subset \overline{D}(c)$ с центром в точке c и радиуса $|c - q|$ содержит K, а также точку q на своей границе. Таким образом, K является пересечением кругов, имеющих на своей границе хотя бы одну точку из K.

Определение 1.4. Комплексное λ *число называется выступающей точкой множества* K*, если существует окружность, проходящая через* λ *и содержащая* K *внутри себя.*

Несмотря на явный «глобальный» характер второго условия в этом определении, выступающая точка есть понятие сугубо локальное. Пусть $b \in K$ и $\overline{D}(b,\varepsilon)$ есть круг с центром в b и радиуса ε. Рассмотрим множество $\overline{D}(b,\varepsilon) \cap K$. Очевидно, что если некоторая окружность проходит через b и содержит K, то она содержит также $\overline{D}(b,\varepsilon) \cap K$. С другой стороны, если существует окружность, проходящая через b и содержащая $\overline{D}(b,\varepsilon) \cap K$, то элементарное геометрическое построение позволяет убедиться, что существует, быть может, другая окружность, проходящая через b и содержащая K.

Нетрудно также установить, что в случае гладкой границы точка в том и только в том случае является выступающей, если кривизна в этой точке отлична от нуля.

Определеие 1.5. Точка p *называется угловой для множества* S*, если существует более одной опорной к* S *прямой, проходящей через* p.

Другим следствием этих рассуждений является

Предложение 1.4. Любая угловая точка $p \in \overline{W}(A)$ *является выступающей для* $\overline{W}(A)$.

Определение 1.6. Точка p *является крайней для* K*, если не существует никакого отрезка* $[r;t] \subset K$*, содержащего* p *в качестве внутренней точки.*

Лемма 1.5. Любая выступающая точка является крайней.

Доказательство. Так как кривизна во внутренней точке сегмента равна нулю, то точка, не являющаяся крайней, не может быть выступающей.

Следующий пример показывает, что не любая крайняя точка является выступающей.

Пример 1.2. Пусть D *–некоторый замкнутый круг и* p *–не принадлежащая* D *точка. Обозначим через* K *выпуклую оболочку* $\{D,p\}$*, через* T_1 *и* T_2 *отрезки касательных к* D*, проходящих через* p*. Точки* $\{t_1\} = D \cap T_1$, $\{t_2\} = D \cap T_2$ *являются крайними, не будучи, однко, выступающими.*

Этот пример также показывает некорректность определения крайней точки в [3], стр. 16, согласно которому "*Точка* p *является крайней точкой множества* K*, если* $p \in K$ *и существует замкнутая полуплоскость, содержащая одну лишь точку* p *из* K". Точки t_1 *и* t_2 являются крайними в обычном и некрайними в этом смысле.

Хотя выступающие точки редки по сравнению с крайними, тем не менее имеет место следующее уточнение (в указанной исключительно простой ситуации) известной теоремы Крейна-Мильмана, доказанное Г. Орландом в [7].

Предложение. Любое непустое компактное подмножество K *в* $\mathfrak{R}$ *есть замкнутая выпуклая оболочка своих выступающих точек.*

Первый результат, касающийся особых точек, принадлежащих границе $W(A)$ и имеющий далеко идущие последствия, есть следующее простое предложение. Оно касается частного подкласса самосопряженных операторов.

Определение 1.7. Оператор A, *действующий в гильбертовом пространстве* H *называется неотрицательным (неположительным), если для любого* $x \in H$ *имеет место неравенство* $\langle Ax, x\rangle \geq 0, (\langle Ax, x\rangle \leq 0)$.

Предложение. Пусть A *неотрицательный (неположительный) оператор. Тогда условия* $Ax = \theta$ *и* $\langle Ax, x\rangle = 0$ *эквивалентны.*

Определение 1.8. Оператор A, *действующий в гильбертовом пространстве называется гипонормальным, если* $A^* A - AA^* \geq \mathbf{0}$.

Отсюда непосредственно следует Теорема А из работы [11].

Предложение. Для гипонормального оператора условия $AA^* x = A^* Ax$ *и* $\|Ax\| = \|A^* x\|$ *эквивалентны.*

Используя сдвиг и поворот, М. Эмбри в [5] доказала следующее

Предложение. Пусть λ *есть граничная точка числового образа* $W(A)$ *и* $\langle Ax, x\rangle = \lambda$. *Тогда существует действительное число* ω *(угол наклона опорной прямой) такое что* $\exp(i\omega)(A - \lambda I)x = \exp(-i\omega)(A - \lambda I)^* x$, *таким образом* $(A - \lambda I)x = \theta$ *влечет* $(A - \lambda I)^* x = \theta$, *т. е. собственное значение, принадлежащее границе числового образа есть нормальное собственное значение.*

Определение 1.9. Оператор A *называется аккретивным, если* $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \geq 0$ *и диссипативным, если* $\mathrm{Im}\langle Ax, x\rangle \geq 0$.

Следствие 1.6. Ядро $N(A) = \{x : Ax = \theta\}$ *аккретивного (диссипативного) оператора приводит его.*

Это следствие приведено в [9], гл. 4, Лемма 5.3, однако его доказательство основано на импликации $\mathrm{Re}\, Ax = \theta \Rightarrow Ax = \theta$, которая ошибочна уже в двумерном пространстве. Действительно, пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Re}\, A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Если

$$x = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}, \ a \neq 0$$

то

$$Ax = \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Re}\, Ax = \theta.$$

Предложение 1.7. Угловая точка μ, *принадлежащая числовому образу* $W(A)$ *является нормальным собственным значением.*

Доказательство. Действительно, если $\exp(i\omega)(A - \mu I)x = \exp(-i\omega)(A - \mu I)^* x = \theta$, $\exp(i\delta)(A - \mu I)x = \exp(-i\delta)(A - \mu I)^* x = \theta$, то $(A - \mu I)x = (A - \mu I)^* x = \theta$.

Несмотря на элементарный характер, указанное Предложение доказывается при излишных ограничениях или частично (см. [4], Теорема 1, [10], Теорема 1, [3], Теорема 1.5-5).

Замечание. Условие $\mu \in W(A)$ здесь существенно. Чтобы показать это, рассмотрим следующий

Пример 1.3. Пусть A–диагональный (нормальный) оператор, действующий на ортонормальный базис $\{e_n\}_0^\infty$ гильбертова пространства по формуле

$$Ae_{2n} = \frac{1}{2n+1} e_{2n}, \ Ae_{2n+1} = \frac{i}{2n+1} e_{2n+1}.$$

Нетрудно убедиться, что $W(A) = \{x + iy : 0 < x \le 1; \ 0 < y \le 1\}$.

Напомним два важных результата, связаных с крайними точками. Первый описывает множества M_λ (см. Теорему 1 из [5]).

Предложение. Точка $\lambda \in W(A)$ является крайней для $W(A)$ в том и только в том случае, когда M_λ является подпространством.

Второй касается гипонормальных операторов ([11], Теорема 1, Следствие).

Предложение. Пусть оператор A гипонормален и $\lambda \in W(A)$ является крайней точкой множества $W(A)$. Тогда λ есть нормальное собственное число.

Определение 1.10. Оператор называется нормалоидным, если его норма и спектральный радиус совпадают. Оператор называется выпуклоидным, если замыкание его числового образа совпадает с выпуклой оболочкой его спектра.

Предложение 1.8. Пусть оператор $A - \lambda I$ является нормалоидным и выпуклоидным для любого $\lambda \in \Re$ и пусть $\mu \in W(A)$ есть выступающая точка числового образа $W(A)$. Тогда μ–нормальное собственное число.

Доказательство. Покажем сначала, что μ принадлежит спектру оператора A. Согласно частичному обращению теоремы Крейна-Мильмана (см. [15], 10.1.3), если $\overline{W(A)}$ является выпуклой оболочкой SpA, то все крайние точки $\overline{W(A)}$ принадлежат также SpA. Так как выступающая точка является крайней, то $\mu \in SpA$. Обозначим через μ_0 центр окружности, фигурирующей в определении выступающей точки и пусть $B = A - \mu_0 I$. Очевидно, что $\mu - \mu_0$ есть выступающая точка $W(B)$, $\mu - \mu_0 \in SpB$ и $\|B\| = |\mu - \mu_0|$, откуда $Bx = (\mu - \mu_0)x$ и $Ax = \mu x, A^* x = \overline{\mu} x$.

Так как собственные элементы операторов A и A^*, отвечающие несопряженным собственным значениям взаимно перпендикулярны, то выступающих точек числового образа таких операторов может быть не более чем счетное число.

Замечание. Как было показано в [1], любой эквипаранормальный оператор является нормалоидным и выпуклоидным.

2. Выдающиеся точки, принадлежащие замыканию числового образа

Пусть $\lambda \in \overline{W}(A)$. Тогда существует последовательность элементов $\{x_n\}$ с единичной нормой, такая что $(Ax_n, x_n) \to \lambda$. Так как единичная сфера гильбертова пространста секвенциально слабо компактна, то из $\{x_n\}$ можно извлечь подпоследовательность (обозначаемую снова через $\{x_n\}$), слабо сходящуюся к некоторому $x, x_n \xrightarrow{w} x$.

Лемма 2.1. Числовая последовательность $\|x - x_n\|$ *сходится и*

$$\lim_{n\to\infty}\|x - x_n\|^2 + \|x\|^2 = 1.$$

Доказательство. Имеем

$$\|x_n\|^2 = \langle x_n - x + x, x_n - x + x\rangle = \|x - x_n\|^2 + \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, x - x_n\rangle.$$

Так как $x - x_n \xrightarrow{w} \theta$, то переходя к пределу, получим желаемое равенство.

Лемма 2.2. Если $\lambda \in \overline{W}(A)\setminus W(A)$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\|x - x_n\| \neq 1$, *то* $\partial W(A)$ *содержит отрезок прямой.*

Доказательство. Заметим, что $\lambda \notin W(A)$ влечет $\lim\limits_{n\to\infty}\|x - x_n\| \neq 0$ и что условия $\lim\limits_{n\to\infty}\|x - x_n\| = 1$ и $x = \theta$ эквивалентны.

Как и выше

$$\langle Ax_n, x_n\rangle = \langle A(x_n - x), x_n - x\rangle + \langle Ax, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle Ax, x_n - x\rangle$$

и

$$\lambda = \langle Ax, x\rangle + \lim_{n\to\infty}\langle A(x_n - x), x_n - x\rangle$$

и, так как $x \neq \theta$

$$\lambda = \|x\|^2\,\frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{\langle A(x_n - x), x_n - x\rangle}{\|x_n - x\|^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|^2,$$

означающий, что λ является выпуклой линейной комбинацией чисел $\mu \in W(A)$ и $\nu \in \overline{W}(A)$. Граничная точка λ, очевидно, не может быть выпуклой линейной комбинацией внутренних точек. Следовательно, $\mu \in \partial W(A)$, $\nu \in \partial W(A)$, и граница множества $W(A)$ содержит некоторый отрезок.

Следствие 2.3. Если $\lambda \in \overline{W}(A)\setminus W(A)$ *есть крайняя точка, то существует последовательность элементов* $\{x_n\}$ *с единичной нормой, слабо сходящаяся к нулю, такая что* $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty}(Ax_n, x_n)$.

В этой связи см. [3], Теорема 1.5-4.

Лемма 2.4. Пусть $\lambda \in SpA$ *и* $|\lambda| = \|A\|$. *Тогда существует последовательность элементов* $\{x_n\}$ *с единичной нормой, такая что*

$$\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0,\ \|(A - \lambda I)^* x_n\| \to 0\,. \tag{2.1}$$

Доказательство. Напомним, что множество $\pi(A) \subset \mathfrak{R}$ называется предельным спектром оператора A, если для любого $\lambda \in \pi(A)$ существует последовательность элементов $\{x_n\}$ с единичной нормой, такая что

$$\|(A-\lambda I)x_n\| \to 0 \ , \tag{2.2}$$

т.е. если $A-\lambda I$ не ограничен снизу. Известно, что граница спектра ∂SpA оператора A содержится в его предельном спектре ([14], Задача 63). Очевидно, что из второго условия этой Леммы имеем $\lambda \in \pi(A)$. Пусть $\lambda_n = \langle Ax_n, x_n \rangle$, где $\{x_n\}$ удовлетворяет (2.2). Из неравенства

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle - \lambda| = |\langle (A-\lambda I)x_n, x_n\rangle| \le \|(A-\lambda I)x_n\|$$

следует $\lambda_n \to \lambda$. Таким образом

$$\|(A-\lambda I)^* x_n\|^2 = \|A^* x_n\|^2 - 2\operatorname{Re}\lambda\overline{\lambda}_n + |\lambda|^2 \le 2\left(|\lambda|^2 - \operatorname{Re}\lambda\overline{\lambda}_n\right) \to 0.$$

Замечание. Если $\lambda \in \overline{W}(A)$, то существует последовательность элементов $\{x_n\}$ с единичной нормой, такая что $\lambda_n = \langle Ax_n, x_n\rangle$ и $\lambda_n \to \lambda$. Вышеприведенное неравенство, примененное к оператору A показывает, что $\|(A-\lambda I)x_n\| \to 0$, таким образом $\lambda \in \pi(A) \subset SpA$. Эта импликация доказана Г. Орландом в [7]. С другой стороны, если $|\lambda| = \|A\|$, то условия $\lambda \in \overline{W}(A)$ и $\lambda \in SpA$ эквивалентны. Интересно, что условие в $|\lambda| = \|A\|$ этой Лемме может быть исключено.

Предложение 2.5. Пусть $\lambda \in \partial\overline{W}(A) \cap SpA$. *Тогда существует последовательность элементов* $\{x_n\}$ *с единичной нормой, удовлетворяющая* (2.1).

Доказательство. Пусть n-перпендикуляр к опорной к $\overline{W}(A)$ в точке λ прямой. Возьмем некоторую точку μ на n такую что $\mu \notin \overline{W}(A)$. Так как $SpA \subset \overline{W}(A)$, то μ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A) = \Re \setminus SpA$. Согласно классическому результату М. Стоуна [12] для резольвенты $R_\mu(A) = (A-\mu I)^{-1}$ имеет место неравенство

$$\|R_\mu(A)\| \le \frac{1}{dist(\mu, W(A))},$$

где

$$dist(\mu, W(A)) = \inf_{s \in W(A)} |s-\mu|.$$

В силу выбора μ имеем

$$dist(\mu, W(A)) = |\lambda - \mu|.$$

и

$$\|R_\mu(A)\| \le \frac{1}{|\lambda-\mu|}.$$

Так как

$$R_\mu(A)(A-\lambda I) = R_\mu(A)(A-\mu I + (\mu-\lambda)I) = I + (\mu-\lambda)R_\mu(A),$$

получим

$$R_\mu(A)-\frac{I}{\lambda-\mu}=\frac{1}{\mu-\lambda}R_\mu(A)(A-\lambda I),$$

и

$$A-\lambda I=(\mu-\lambda)(A-\mu I)\left(R_\mu(A)-\frac{I}{\lambda-\mu}\right),$$

показывающий, что условия $\lambda\in\pi(A)$ и $(\lambda-\mu)^{-1}\in\pi(R_\mu(A))$ эквивалентны. Вспоминая Лемму 2.4, будем иметь,

$$\left\|\left(R_\mu(A)-\frac{I}{\lambda-\mu}\right)^* x_n\right\|\to 0,$$

откуда

$$\left\|(A-\lambda I)^* x_n\right\|\to 0 .$$

Из Предложения 2.5 и Следствия 2.3 получим

Предложение 2.6. Пусть $\lambda\in\overline{W}(A)\setminus W(A)$ *является крайней точкой, принадлежащей* SpA*. Тогда существует последовательность элементов* $\{x_n\}$ *с единичной нормой, слабо сходящаяся к нулю и удовлетворяющая* (2.1).

Следствие 2.7. Пусть $\lambda\in\overline{W}(A)\setminus W(A)$ *есть угловая точка* $\overline{W}(A)$ *. Тогда существует последовательность элементов* $\{x_n\}$ *с единичной нормой, слабо сходящаяся к нулю и удовлетворяющая* (2.1).

Это Следствие является уточненим Теоремы 2 из [10], согласно которому условие $\lambda\in\overline{W}(A)\setminus W(A)$ есть угловая точка влечет $\lambda\in\pi(A)$.

Заметим, что Предложение 1.7 и Следствие 2.7 полностью решают задачу об описании угловых точек числового образа.

Литература

1. Л. З. Геворкян, Локальная спектальная теория эквипаранормальных операторов, Доклады НАН Армении, т. 97, (1997), # 4, стр. 11-16.
2. Л. З. Геворкян, Локальная оценка норм итераций и уточнение неравенства Рида-Халмоша, Доклады НАН Армении, т. 99, (1999), # 4, стр. 306-311.
3. K. E. Gustafson, D. K. M. Rao, Numerical range, Springer, 1997.
4. W. F. Donoghue, On the numerical range of a bounded operator, Michigan Math. J., v. 4 (1957), pp. 261-263.
5. M. Embry, The numerical range of an operator, Pacific J. Math., v. 32, (1970), pp. 647-650.
6. K. B. Laursen, Operators with finite ascent, Pacific J. Math., 152 (1992), pp. 323-336.
7. G. H. Orland, On a class of operators, Proc. Amer. Math. Soc., v. 15, (1964), pp. 75-79.
8. F. Riesz and B. Sz.-Nagy, Uber Kontraktionen des Hilbertschen Raumes. Acta Sci. Math. (Szeged), 10 (1943), pp. 202-205.

9. Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, М., Мир, 1972.
10. B. Sims, On the connection between the numerical range and spectrum of an operator in a Hilbert space, J. London Math. Soc., v. 8, (1974), pp. 57-59.
11. J. G. Stampfli, Extreme points of the numerical range of a hyponormal operator, Mich. Math. J., v. 13, (1966), pp. 87-89.
12. M. Stone, Linear transformations in Hilbert space, New York, 1932.
13. T. Furuta, Some characterizations of convexoid operators, Rev. Roum. Math. Pure&Appl., v. 18, (1973), pp. 893-900.
14. П. Р. Халмош, Гильбертово пространство в задачах, Мир, М., 1970.
15. Р. Эдвардс, Функциональный анализ, М., Мир, 1972.