

# Процессы установления нелинейных колебаний газового пузырька в жидкости

Соседко Е.В. ([s\\_kat@mail.ru](mailto:s_kat@mail.ru))

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН

Исследованы нелинейные колебания газовых пузырьков при различной длительности внешнего воздействия. Рассмотрен эффект нестационарной раскачки нелинейных колебаний пузырьков при различных соотношениях между частотами - внешней силы  $\omega_p$  и собственных колебаний  $\Omega_0$ . Показано, что раскачка нелинейных колебаний на комбинационных частотах существенно отличается для резонансных пузырьков на частотах основного и субгармонического резонанса и для нерезонансных пузырьков. Переходные процессы при нелинейных колебаниях пузырьков промоделированы в широком интервале определяющих параметров. Проведены сравнения с экспериментальными результатами других авторов.

Изучение переходных процессов в нелинейных резонансах газовых пузырьков в жидкости представляет собой исследование «горячей точки» в физике кавитационных явлений. Своеобразие реакции пузырька как нелинейной динамической системы на внешнее гармоническое воздействие частоты  $\omega_p$  состоит в появлении субгармонических составляющих. Наиболее широко субгармоническая компонента акустического излучения используется при работе с контрастными агентами – газовыми пузырьками, покрытыми липидной оболочкой, применяемыми в ультразвуковой медицинской диагностике. В настоящей работе исследованы процессы установления колебаний пузырьков на субгармонических частотах.

Проанализируем радиальные пульсации газового пузырька в жидкости под действием мощной акустической волны. В качестве примера такого сигнала выберем импульс длительностью  $T_{imp}$ , с частотой заполнения  $\omega_p$ , и амплитудой  $p_m$ . Так как возбуждение субгармонической составляющей носит пороговый характер, то величина и вариации порогового значения амплитуды давления  $p_m$  представляют значительный интерес, поскольку субгармонический сигнал возникает только в определенной области значений определяющих параметров  $p_m$  и  $\omega_p$  - выше порога. Однако, начиная с работы Непайерса [1], отмечается наличие небольшой субгармонической составляющей и ниже порога [2-4], так что нарастание этой спектральной компоненты не имеет, строго говоря, порогового характера.

Отсутствие порога возбуждения субгармонической составляющей связано со спецификой переходных процессов в окрестности субгармонического резонанса. В окрестности порога теряет свою устойчивость состояние с периодом собственных

колебаний близким к удвоенному периоду внешнего поля (неустойчивость удвоения периода). В этом случае обращается в нуль один из двух показателей Ляпунова характеризующий линейную устойчивость указанных колебаний. При включении внешнего поля, передний фронт импульса, проходя через пузырек, помимо вынужденных, возбуждает и собственные колебания с периодом  $2T$ . В окрестности порога затухание собственных колебаний, определяемое показателем линейной устойчивости, благодаря параметрической перекачке энергии в эту компоненту, очень мало. Оно обращается в нуль для порогового значения амплитуды накачки. В течение продолжительного времени пузырек продолжает совершать колебания на собственной частоте, не совпадающей с частотой внешнего воздействия. По этой причине время переходных процессов может превышать длительность импульса накачки, а соответствующая компонента в спектре излучения интерпретироваться как появление субгармонической компоненты ниже порога.

Для рассмотрения обсуждаемого эффекта использовано уравнение Рэлея-Плессета (РП), описывающего пульсации пузырька в поле давления  $P_p = p_m \cos(\omega_p t + \alpha)$ .

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{P_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \right] + 2\delta R_0 \dot{R} = -\frac{P_p}{\rho_0}, \quad (1)$$

здесь  $R_0$ ,  $R$  - равновесный и текущий радиусы пузырька,  $P_0$  и  $\rho_0$  - равновесные значения давления и плотности жидкости,  $\gamma$  - показатель политропы,  $\delta$  - затухание, эффективно учитывающее диссипативные процессы вязкости и теплопроводности, а также радиационные потери.

Для решения уравнения РП часто используют асимптотические методы, наиболее известным из которых является метод Боголюбова. Асимптотическое разложение решения в окрестности субгармонического резонанса  $|\omega_p - 2\Omega_0| \ll \omega_p$  имеет следующий вид [6]:

$$(R - R_0) / R_0 = a \cos(i\Omega_0 t + i\vartheta) + \frac{p_m \cos(\omega_p t + \alpha)}{\rho_0 R_0^2 (\omega_p^2 - \Omega_0^2)} + \varepsilon u_1(a, \vartheta, t) + \varepsilon^2 u_2(a, \vartheta, t) + \dots \quad (2)$$

здесь  $\Omega_0 = (3\gamma P_0 / \rho_0 R_0^2)^{1/2}$  - собственная частота пузырька;  $\varepsilon$  - безразмерный малый параметр, вводимый для обозначения порядка нелинейных членов,  $u_1(a, \vartheta, t)$ ,  $u_2(a, \vartheta, t)$  - члены разложения высших порядков.

Медленно меняющиеся амплитуда  $a$  и фаза  $\vartheta$  колебаний определяются из системы «укороченных» уравнений, следующей из требования отсутствия секулярных членов в

разложении. Учет в (1) нелинейных членов до второго порядка включительно приводит к следующему уравнению для  $z = a \exp(i\vartheta) \exp[-i(\omega_p/2 - \Omega_0)t]$ :

$$\dot{z} = -\delta z - i\Delta\Omega z - i\delta \frac{p_m}{p_{ks}} \exp(i\alpha) z^*, \quad \Delta\Omega = \omega_p/2 - \Omega_0. \quad (3)$$

где  $p_{ks} = 4\delta\Omega_0\rho_0 R_0^2 \gamma^{-1}$  - порог субгармонического резонанса.

Решение системы уравнений с постоянными коэффициентами (3) имеет вид

$$z(t) = \exp(-\lambda_1 t) \frac{1}{2} \left[ z(0) \left( 1 - i \frac{2\Delta\Omega}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) - iz^*(0) \frac{\delta p_m}{p_{ks}(\lambda_1 - \lambda_2)} \right] + \quad (4)$$

$$+ \exp(-\lambda_2 t) \frac{1}{2} \left[ z(0) \left( 1 + i \frac{2\Delta\Omega}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) + iz^*(0) \frac{\delta p_m}{p_{ks}(\lambda_1 - \lambda_2)} \right],$$

где  $\lambda_{1,2} = \delta \left[ 1 \mp \sqrt{\left( p_m^2 / p_{ks}^2 \right) - (\Delta\Omega / \delta)^2} \right]$  - показатели линейной устойчивости.

Вблизи порога  $p_m = p_b - \Delta p$ ,  $\Delta p > 0$ ,  $\Delta p \ll p_b$ ,  $p_b^2 = p_{ks}^2 \left[ 1 + (\Delta\Omega / \delta)^2 \right]$

показатель  $\lambda_1 \approx \delta \left( \Delta p p_b / p_{ks}^2 \right)$  мал, поэтому первое слагаемое в формуле (4) будет

доминировать на временах  $t = \lambda_1^{-1} \approx \left[ \delta \left( \Delta p p_b / p_{ks}^2 \right) \right]^{-1} \gg \delta^{-1}$  и описывать

субгармоническую компоненту излучения пузырька.

Подстановка явных выражений для начальных значений  $z(0)$ ,  $z^*(0)$  дает следующее выражение колебаний относительно радиуса пузырька на собственной частоте вблизи субгармонического резонанса:

$$a(t) \cos(\Omega_0 t + \vartheta(t)) = a(0) \left( p_b / p_{ks} \right) \exp \left[ -\delta t \left( \Delta p p_b / p_{ks}^2 \right) \right] \times \\ \times \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[ i \left( (\omega_p / 2) t + \operatorname{arctg}(2tg\alpha) \right) \right] \times \right. \\ \left. \times 0,5 \left[ \exp i \left( \operatorname{arctg}(\Delta\Omega / \delta) \right) - \exp i \left( \pi / 2 - 2 \operatorname{arctg}(2tg\alpha) + \alpha \right) \right] \right\} \quad (5)$$

Затягивание собственных колебаний пузырька, возбужденных передним фронтом импульса накачки, позволяет объяснить экспериментально наблюдаемую генерацию субгармонического сигнала ниже порога. В эксперименте [2] зондирование области, в которой с помощью электролиза создавались пузырьки с размерами  $(5-10) \cdot 10^{-6}$  м, производилось ультразвуковыми импульсами с частотой заполнения 1,2 МГц и

длительностью 10 мкс. Проводились измерения уровня сигнала на частоте 0,6 МГц, которые показали на отсутствие явно выраженного порога генерации в диапазоне амплитуд зондирующих импульсов  $(0,25-1) \cdot 10^5$  Па.

Из формул (3)-(5) можно получить спектральную плотность давления, излученного пузырьком на частоте субгармоники при воздействии частотнозаполненного импульса длительностью  $T_{imp}$ :

$$S(\omega_p / 2) \sim \frac{\left(1 - \exp\left[-T_{imp}(\delta - \lambda_1)\right]\right)^2 + 2(1 - \cos(\Delta\Omega T_{imp})) \exp\left[-T_{imp}(\delta - \lambda_1)\right]}{\left((\delta - \lambda_1)/\delta\right)^2 + (\Delta\Omega/\delta)^2} \quad (6)$$

Коэффициент затухания пузырька  $\delta$ , резонансного на частоте 0,6 МГц, согласно [106] составляет  $\delta \sim 4 \cdot 10^5$  (1/с). Порог субгармонического резонанса  $p_{ks}$  при этом будет равен  $p_{ks} \sim 0,8 \cdot 10^5$  Па. Поскольку значение концентрации пузырьков не определялось в ходе обсуждаемых экспериментов, эта величина являлась подгоночным параметром. Качественное согласие с экспериментом являлось определенно аргументом в пользу предлагаемого объяснения, количественное же сопоставление требовало последовательного суммирования вклада отдельных пузырьков и численного решения уравнения РП, поскольку значительная величина порога ограничивает точность используемого асимптотического разложения.

Случай переходных процессов вблизи субгармонического резонанса был проанализирован в [5,6] для небольшой амплитуды внешней силы. Особенностью настоящей работы является изучение численными методами нелинейных колебаний пузырьков в широком интервале определяющих параметров – амплитуды накачки и радиусов пузырьков.

Выбор значений определяющих параметров диктуется следующими обстоятельствами: анализируется окрестность субгармонического резонанса для следующих значений частоты накачки  $\eta_s = 1.2$  Мц и амплитуды накачки  $s_s = p_m/p_{ks}$ , изменяющейся в пределах от  $0.5 \cdot 10^5$  до  $2 \cdot 10^5$  Па ( $p_{ks} \approx 0.8 \cdot 10^5$  Па для  $\gamma=1.4$  и добротности  $Q = \Omega_0/\delta=10$ ). Длительность временной эволюции траекторий составляет 250 периодов внешнего поля. Причем после 150 периодов была отключена внешняя сила. Размеры газовых пузырьков (от 2.66 до 7.98 мкм) задавались в зависимости от частоты и отвечали дорезонансному, резонансному и зарезонансному возбуждению на субгармонике. Результат решения представлен на рис. 1 в виде зависимости  $R$  от  $t'$ , где  $t' = \omega_p t$ .

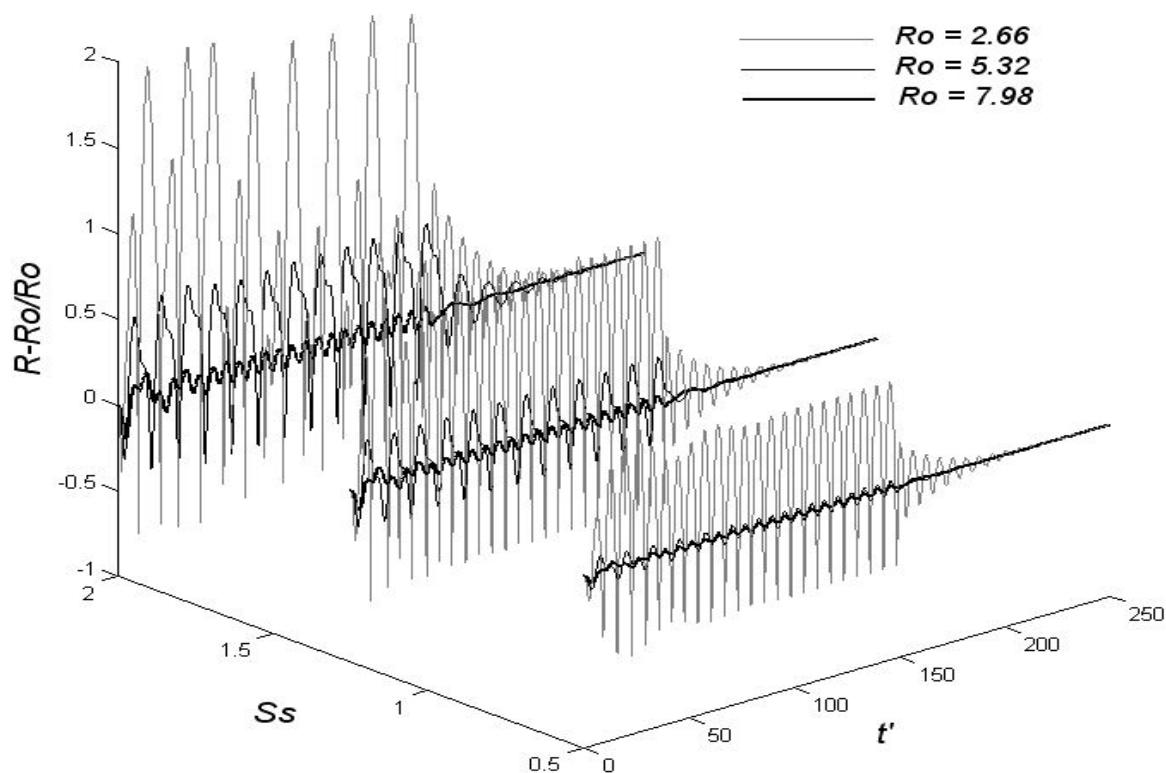


Рис. 1. Временная эволюция пульсаций стенки пузырька при следующих значениях определяющих параметров: добротность  $Q = 10$ , частота  $\eta_s = 1.2$ , амплитуда накачки  $s_s = [0.5; 1.25; 2.0]$ . Радиусы пузырьков  $R_0 = [2.66; 5.32; 7.98]$ . По оси  $x$  отложено:  $t' = \omega_p t$ , по оси  $y$  отложено:  $s_s = p_m/p_{ks}$ , по оси  $z$  отложено:  $(R-R_0)/R_0$

В результате изменения амплитуды накачки и радиусов пузырьков значительные изменения претерпевает и форма акустического давления, переизлученного пузырьком:

$$P(t)r = \rho(R(t)^2 \ddot{R}(t) + 2R(t) \dot{R}(t)^2)$$
. На рис. 2 представлены 9 спектров плотности мощности переизлученного пузырьком звука при различных значениях определяющих параметров – амплитуды накачки и радиусов пузырьков. Исследования проводились при различных величинах добротности  $Q$ , в настоящей работе  $Q$  была положена равной 10. При малой добротности ( $Q < 5$ ) характер переходных процессов имеет похожий вид, существует лишь единственное отличие – колебания устанавливаются быстрее.

Одновременно проводились исследования при различной длительности внешнего воздействия с целью изучения эффектов нестационарной раскачки нелинейных колебаний пузырьков при различных соотношениях между частотой внешней силы  $\omega_p$  и частотой собственных колебаний  $\Omega_0$ .

На рис. 3 показана зависимость отклика сигнала на субгармонике от длительности внешней силы для различных значений радиусов пузырьков.

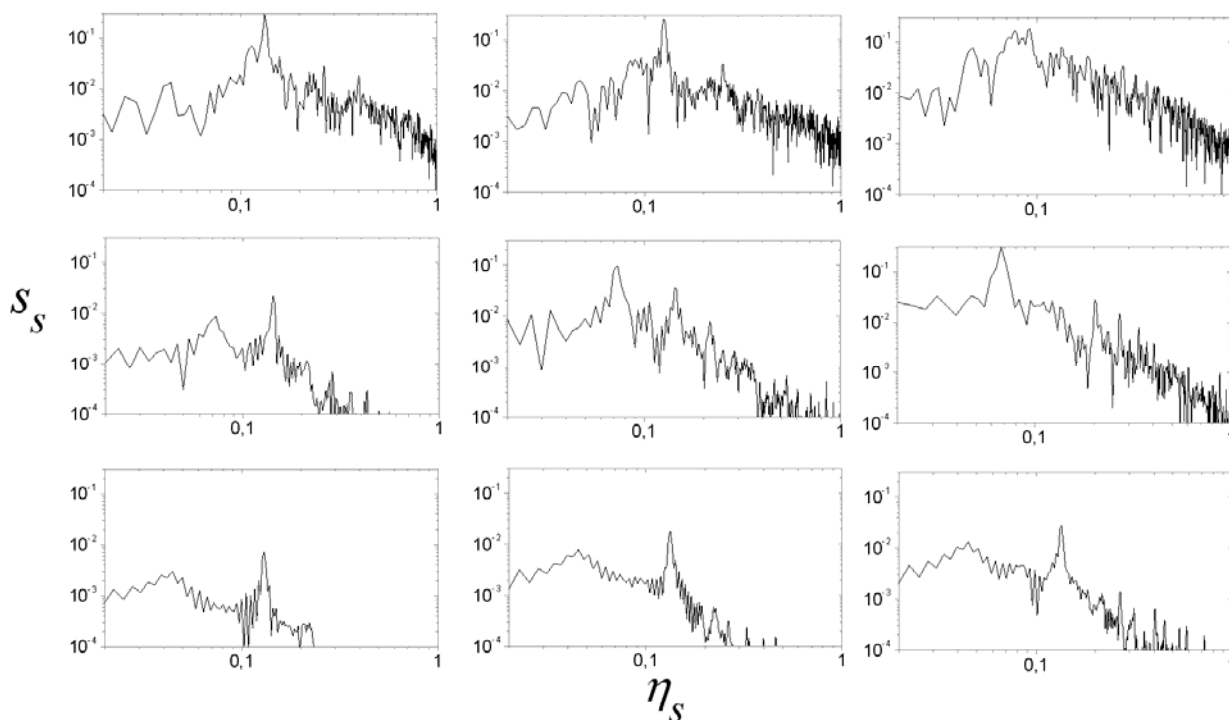


Рис. 2. Спектр плотности мощности переизлученного пузырьком звука при следующих значениях определяющих параметров: добротность  $Q = 10$ , частота  $\eta_s = 1.2$ , амплитуда накачки  $s_s = [0.5; 1.25; 2.0]$  – изменяется слева направо. Радиусы пузырьков  $R_0 = [2.66; 5.32; 7.98]$  – изменяются сверху вниз.

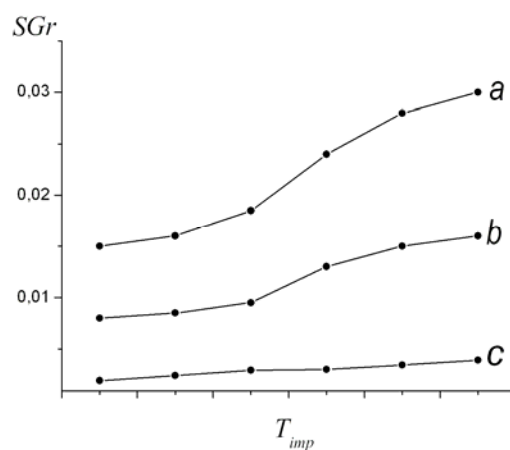


Рис. 3. Зависимость отклика сигнала на субгармонике от длительности внешней силы для различных значений радиусов пузырьков. Добротность  $Q = 10$ , частота накачки  $\eta_s = 1.2$ , амплитуда накачки  $s_s = 1.25$ . График *a* - радиус пузырьков  $R_0 = 5.32$ . График *b* - радиус пузырьков  $R_0 = 2.66$ . График *c* - радиус пузырьков  $R_0 = 7.98$ .

По оси абсцисс отложена  $T_{imp}$  - длительность внешней силы, по оси ординат –  $SGr$  - значение отклика сигнала на субгармонике.

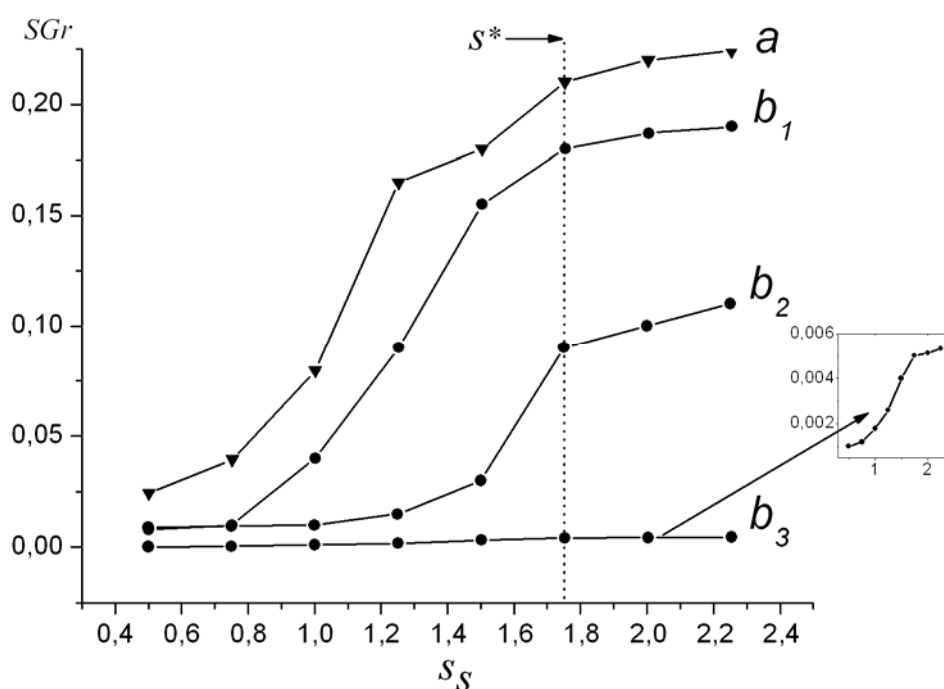


Рис. 4. Зависимость отклика сигнала на субгармонике от амплитуды накачки для различных значений радиусов пузырьков. Добротность  $Q = 10$ , частота накачки  $\eta_s = 1.2$ , амплитуда накачки  $s_s =$  изменялась от 0.5 до 2. График  $a$  - экспериментальные данные из статьи [2]. График  $b_1$  - радиус пузырьков  $R_0 = 5.32$ . График  $b_2$  - радиус пузырьков  $R_0 = 2.66$ . График  $b_3$  - радиус пузырьков  $R_0 = 7.98$ . По оси абсцисс отложена амплитуда, по оси ординат –  $SGr$  - значение отклика сигнала на субгармонике.

При увеличении длительности импульса происходит увеличение значения отклика сигнала на субгармонике. Раскачка нелинейных колебаний на комбинационных частотах существенно отличается для пузырьков на частотах основного и субгармонического резонанса и для нерезонансных пузырьков.

В заключение была проведена оценка зависимости отклика сигнала на субгармонике (внешняя частота  $\eta_s = 1.2$ ) от амплитуды накачки для различных значений радиусов пузырьков. Численный эксперимент подтверждает результаты экспериментальных данных [2], что продемонстрировано на рис. 4.

При амплитудах акустического сигнала, меньших  $s^* = p_m/p_{ks}$  эта зависимость близка к степенной или экспоненциальной, при  $s_s > s^*$  - наблюдается насыщение. Таким образом,  $s^*$  представляет собой пороговое значение для развития субгармоники. Исходя из этого, можно сделать три вывода. Первое, субгармоника возникает при  $p_m < s^* p_{ks}$ . Второе, субгармоника резко усиливается при  $p_m \sim s^* p_{ks}$ . Третье, субгармоника имеет насыщение при

$p_m > s^* p_{ks}$ , т.е. вне зависимости от амплитуды поля уровень субгармоники не увеличивается.

Итак, в итоге проведенного анализа сделан вывод о том, что в число определяющих параметров нелинейного резонанса следует наряду с частотой и амплитудой включить также и длительность импульсного воздействия внешней силы. Физическая причина здесь заключается в том, что в качестве важного параметра выступает амплитуда колебаний радиуса на собственной частоте.

Полученные в работе результаты позволяют с помощью аналитических и численных методов объяснить, почему порог субгармонического резонанса, который является одним из важных критериев наступления акустической кавитации, не имеет резкого – порогового характера. С другой стороны регистрация субгармонической компоненты становится одной из ведущих методик в ультразвуковой диагностике с использованием контрастных агентов [7]. То, что можно последовательно описать форму сигнала вблизи порога имеет существенное прикладное значение, хотя, конечно, нужны дополнительные расчеты для более рафинированной модели, учитывающей наличие липидной оболочки на пузырьке.

Автор выражает благодарность Максимову А.О. за плодотворное обсуждение.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 04-02-16412 и ДВО РАН 04-3-А-07-038.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

- [1] Neppiras E.A. Subharmonic and other low-frequency emission from bubbles in sound-irradiated liquids // J. Acoust. Soc. Am. 1969. V. 46. N. 3. P. 587-601.
- [2] Мансфельд А.Д., Рейман А.М. Особенности обнаружения газовых пузырьков в неоднородных нелинейных средах // В кн.: Ультразвуковая диагностика. Горький: ИПФ АН. 1983. С. 151-161.
- [3] Кирилов А.Г., Мансфельд А.Д., Рейман А.М., Чичагов П.К. // В кн. Проблемы нелинейной акустики. 2 часть. Новосибирск: Ин-т Гидродинамики. 1987. С. 32-34.
- [4] Losberg O., Novem J.M., Aksum B. Experimental observation of subharmonic oscillations in Infoson bubbles // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 99. N. 3. P. 1366-1369.
- [5] Максимов А.О., Соседко Е.В. Переходные процессы в окрестности порога субгармонического резонанса // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. No 17, С. 1-6.
- [6] Соседко Е.В. Особенности нелинейный резонансов и их проявления в акустике микронеоднородных сред // Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. ТОИ ДВО РАН, Владивосток: 2003. 132с.

- [7] Gong X.F. , Lu R.R. , Yu J.F. , and Shi W.T. Measurement of Subharmonics in Liquid Containing Encapsulated Microbubbles / Proceedings 16<sup>th</sup> International Symposium on nonlinear acoustics, 2002.