

## Об одной многокритериальной задаче о $p$ -медианах на предфрактальных графах

Павлов Д.А. ([defm@rambler.ru](mailto:defm@rambler.ru)), Узденов А.А.

Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия

Рассмотрим взвешенный предфрактальный граф  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденный затравкой  $H = (W, Q)$ , у которой  $|W| = n$ ,  $|Q| = q$ . Предфрактальный граф *взвешен*, если каждому его ребру  $e^{(l)} \in E_L$  приписано действительное число  $w(e^{(l)}) \in (\theta^{l-1}a, \theta^{l-1}b)$ , где  $l = \overline{1, L}$  – ранг ребра,  $a > 0$  и  $\theta < \frac{a}{b}$  [1].

Пусть  $x$  – подмножество, содержащее  $p$  вершин, множества  $V_l$  вершин предфрактального  $(n, L)$ -графа  $G_L = (V_L, E_L)$ . Через  $d(x, v_i)$  будем обозначать наикратчайшее из расстояний между вершинами множества  $x$  и вершиной  $v_i$ , т.е.  $d(x, v_i) = \min_{v_j \in x} [d(v_j, v_i)]$ . Пусть  $\sigma(x) = \sum_{v_j \in V_l} d(x, v_j)$  –

передаточное число [2] множества  $x$ . Множество  $x^*$ , для которого  $\sigma(x^*) = \min_{x \subseteq V_l} [\sigma(x)]$ , называется  $p$ -медианой предфрактального  $(n, L)$ -графа  $G_L = (V_L, E_L)$  [3].

Множество всех  $x^*$  допустимых решений обозначим через  $X$ . На множестве  $X$  определим векторно-целевую функцию (ВЦФ):

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x), x \in X), \tag{1}$$

$$F_1(x) = [\sigma(x)] \rightarrow \min, \tag{2}$$

где  $\sigma(x)$  – передаточное число;

$$F_2(x) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}^l \rightarrow \min, \tag{3}$$

$l = \overline{1, N}$ ,  $c_{ij}^l$  – суммарный минимальный вес рёбер, участвующих в  $p_l$ -медианах;

$$F_3(x) = \lambda \rightarrow \min, \tag{4}$$

где  $\lambda$  – количество типов медиан;

$$F_4(x) = |x^*| \rightarrow \min, \tag{5}$$

где  $F_4(x)$  – мощность множества  $x^*$ .

Все критерии (2)-(5) ВЦФ (1) имеют конкретную содержательную интерпретацию. На практике передаточное число  $\sigma(x)$ , критерий  $F_1(x)$ , может означать, например, расстояние от самого далекого потребителя

(дома, квартала, организации) до системы служб (телефонные сети, электросети, базы снабжения).

Весы, приписанные ребрам предфрактального графа  $G_L$ , критерий  $F_2(x)$ , могут отражать конкретные ограничения (время, расстояние), налагаемые на систему служб, так и общие затраты, выражаемые в условных единицах.

На практике, при размещении баз снабжения, выборе места расположения коммутаторов в телефонной сети, подстанций в электросетях, отделов сортировки в почтовой и телеграфной связи для большей эффективности необходимо чётко разграничивать задачу размещения по масштабу деятельности, т. е. по уровням. Например, медианы нижнего уровня осуществляют связи по городу (селу), медианы выше – по региону, ещё выше – по всему государству. Чрезмерно малое или очень большое количество медиан разных типов приведёт к большой нагрузке в работе. На достижения этого оптимума направлен критерий  $F_3(x)$ .

Полученное значение числа  $p$ , критерий  $F_4(x)$ , будет наименьшим числом аварийных служб, а  $p$ -медиана их оптимальным размещением, удовлетворяющим предъявляемым требованиям.

Для решения этой задачи предложен полиномиальный алгоритм  $\alpha$  с оценками.

**Алгоритм  $\alpha$  выделения  $p$ -медианы предфрактального**

**$(n, l)$ -графа  $G_l$**

ВХОД: взвешенный предфрактальный граф  $G_L = (V_L, E_L)$ .

ВЫХОД:  $p_l$ -медиана предфрактального графа  $G_L$ .

ШАГ 1. Последовательно для каждой затравки  $z_s^{(L)}$ ,  $s = \overline{1, n^{L-1}}$  найти  $p_l$ -медиану, используя процедуру P-MEDIAN.

ШАГ 2. На выходе шага 1 получаем  $n^{L-1}$   $p_l$ -медианы, для затравок  $z_s^{(L)}$ . Объединяя эти  $p_l$ -медианы, получим  $p$ -медиану предфрактального графа  $G_L$ .

ПРОЦЕДУРА P-MEDIAN.

ВХОД: взвешенный граф  $G = (V, E)$ .

ВЫХОД:  $p$ -медиана графа  $G$ . ◀

**ТЕОРЕМА 1.** Алгоритм  $\alpha$  выделяет  $p$ -медиану на предфрактальном графе  $G_L = (V_L, E_L)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На последнем шаге  $L$  построения предфрактального графа  $G_L$  все вершины замещаются затравкой  $H = (W, Q)$ , тогда каждая вершина  $L$ -го ранга принадлежит какой-либо подграф-затравке  $z_s^{(L)}$ . Найдя  $p_l$ -медиану на затравке  $z_s^{(L)}$ , все ее вершины будут в области «обслуживания».

Таким образом отбросим все ребра ранга  $l = \overline{1, L-1}$ , и будем работать только с подграф-затравками  $L$ -го ранга  $z_s^{(L)}$ ,  $s = \overline{1, n^{L-1}}$ .

Выделим на подграф-затравке  $L$ -го ранга  $z_1^{(L)}$   $p_1$ -медиану. В результате  $p_1$ -медиана обслуживает  $n$  вершин. Далее выделим на второй затравке  $L$ -го ранга  $z_2^{(L)}$   $p_2$ -медиану, которая обслуживает еще  $n$  вершин.

Тогда, после выделения  $p_{n^{L-1}}$ -медианы на последней затравке  $z_{n^{L-1}}^{(L)}$ , всего будет обслуживаться  $n^{L-1} \cdot n = n^L$  вершин. Тогда обслуживается все множество вершин  $G_L = (V_L, E_L)$ :  $|V_L| = n^L$ . Объединив все  $n^{L-1}$   $p_l$ -медианы получим  $p$ -медиану всего предфрактального графа. ◀

**ТЕОРЕМА 2.** Алгоритм  $\alpha$  выделяет  $p$ -медиану на предфрактальном графе  $G_L = (V_L, E_L)$ , порожденном  $n$ -вершинной затравкой  $H = (W, Q)$ , оптимальный по первому  $F_1(x)$  и третьему  $F_3(x)$  критерию, и оцениваемое по второму  $F_2(x) \leq N \cdot \theta^{L-1} b$  и четвертому  $F_4(x) = n^{L-1} \cdot p$  критериям.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательством оптимальности по первому критерию  $F_1(x)$  служит теорема 1, поскольку на выходе алгоритма  $\alpha$  получаем  $p$ -медиану предфрактального графа.

Третий критерий  $F_3(x)$  минимизирует количество типов медиан, т. е. число медиан разного ранга, но  $p$ -медиана состоит только из медиан ранга  $L$ , так как медианы выделяются только на подграф-затравках  $L$ -го ранга, тогда критерий  $F_3(x)$  принимает заведомо минимальное число,  $F_3(x) = 1$ .

Критерий  $F_2(x) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}^l \rightarrow \min$ ,  $l = \overline{1, N}$ , суммарный вес радиусов  $p$ -медианы, оценивается следующим образом. Веса рёбер на подграф-затравках  $L$ -го ранга лежат в промежутке  $[\theta^{L-1} a; \theta^{L-1} b]$ , где  $a > 0$ , и  $\theta < \frac{a}{b}$ ; возьмем правую часть отрезка  $\theta^{L-1} b$ . Число вершин на затравке равно  $n$ , тогда радиус в худшем случае равен  $\frac{n}{p}$  рёбер, или общий вес  $\frac{n}{p} \cdot \theta^{L-1} b$ . Всего на затравке  $p$  вершин, являющихся медианами, тогда суммарный вес радиусов на одной подграф-затравке равен  $n \cdot \theta^{L-1} b$ , а на всем предфрактальном графе  $n^{L-1} \cdot n \cdot \theta^{L-1} b = N \cdot \theta^{L-1} b$ . Тогда получаем оценку второго критерия –  $F_2(x) \leq N \cdot \theta^{L-1} b$ .

Четвертый критерий  $F_4(x) = |x^*| \rightarrow \min$ , количество вершин являющихся медианами, высчитывается в зависимости от алгоритма. В данном случае алгоритм  $\alpha$  выделяет на каждой затравке по  $p$  медиане,

затравок на каждом ранге  $n^{L-1}$ , тогда в сумме получается  $n^{L-1} \cdot p$  медиан. То есть можно сказать, что  $F_4(x) = n^{L-1} \cdot p$ . ◀

### Литература

1. *Кочкаров А.М.* Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. – Нижний Архыз: РАН САО – 1998.
2. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.
3. *Узденов А.А.* Гарантированные оценки  $p$ -медиан на предфрактальном графе с затравкой – полный  $n$ -вершинный граф // XVII Международная научная конференция “Математические методы в технике и технологиях ММТТ-17”. Том 1, секция 1. Кострома, КГТУ, 2004, с. 180-181.